赤摂也／広瀬健 編

現代数学への序章 **3**

線型代数

小島　順

昭和 51 年 5 月 10 日　第 1 刷発行
1976 © Jun Kojima
発行所　日本放送出版協会

組版作業者から利用者へのお願い
各章ごとに分割した PDF ファイルです。章をまたがるハイパーリンクは機能しません。

第3章

線型写像

線型空間から線型空間への写像で，線型空間としての構造を保存するものを線型写像という．その正確な意味は次のとおりである．

3.1

X, Y を線型空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が**線型**であるとは

(i) 任意の $x, y \in X$ に対し $f(x+y) = f(x) + f(y)$
(ii) 任意の $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ に対して $f(\lambda x) = \lambda(f(x))$

となることをいう．

いいかえれば，和を値の和にうつし[*1]，λ 倍を値の λ 倍にうつすのが線型写像である．

一般に，何らかの数学的構造について論ずるときは，その構造をもつ集合だけでなく，それらの集合の間の写像で，考えている構造と“両立する”ものを合わせ取り上げる．集合と写像が対になってはじめてその構造についての理論が成立する．例えば，位相空間と連続写像，微分多

[*1] 「写し」あるいは「移し」．物の形や内容そのままを，他のところにあらわれさせる意（岩波古語辞典）．「移す」と「写す」は漢字で書くと別の言葉のようにみえるが，本来は同じ言葉である（大野晋「日本語をさかのぼる」（岩波新書）p.134）．

様体と可微分写像，群と群写像，線型空間と線型写像とうふうにである．線型空間の “あつまり” とその間の線型写像の “すべて” よりなる “線型のカテゴリー” の理論が線型代数である (6.3).

線型構造を保存するという以上，ゼロをゼロにうつし，反元を反元にうつすことが要求されるが，この二つは (3.1) の (i)，(ii) より導かれるので，普通は定義に含めない．

3.1.1　$f\colon X \to Y$ が線型のとき

(iii) $f(0) - 0$,
(iv) すべての $x \in X$ に対し
$f(-x) = -f(x)$
である．また f は差を差にうつす：
(v) $f(x - y) = f(x) - f(y)$.

証明． (iii) $f(0) = f(00) = 0f(0) = 0$
(iv) $f(-x) = f((-1)x) = (-1)f(x) = -f(x)$
(v) $f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y)$ ■

(iii) での 00 の右側の 0 はベクトル，左側の 0 はスカラーである．

3.1.2　$f\colon X \to Y$ が線型であるためには，任意の $x, y \in X$，任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して
$f(\lambda x + \mu y) = \lambda(f(x)) + \mu(f(y))$
となることが必要かつ十分である．

証明． 練習問題とする． ■

このように線型写像は線型結合を保存する写像として特徴づけられる．

3.2 同型

X, Y を線型写像とする．双対

$$f\colon X \to Y$$

がその逆双射 f^{-1} とともに線型であるとき，f は**同型写像**であるという．

ところが

3.2.1 双射 $f\colon X \to Y$ が線型ならば逆双射 f^{-1} も線型である． ■

したがて，

$$f\text{が同型写像} \iff f\text{が線型写像}$$

である[*2]．

同型写像のことを単に**同型**（isomorphism）ともいう．f が同型ならば f^{-1} も同型である．逆線型写像が存在する線型写像という意味で，同型写像のことを**可逆**な線型写像ともいう．このとき線型空間 X と Y は（f によって）**同型**である（isomorphic）という．

3.2.2 われわれの“公理的方法”では（極端にいえば）何でも線型空間になる．したがって，さまざまな線型空間で同型なものを同一視する，という形で整理していかないと収拾がつかなくなる．公理的方法では同型な空間の同一視の操作が不可欠である．

その場合，同型といっても，標準的な同型と標準的でない同型とは，同型写像を与えることができるが，それはたまたまそう決めた偶然的なものだ，という感じの場合である．標準的でない同型では，真の意味では両者を同一視できない．ただ，標準的かどうかはそのときの立場にもよるわけで，固定的なものではない．“標準的”という概念の数学的定義があるわけではない．

[*2] 可微分双射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^3$ の逆双射 $x \mapsto x^{1/3}$ が可微分でない（0 で微分不能）であることを考えると，あるカテゴリーに属する双射の逆双射が同じカテゴリーに属することは，はじめから明らかというわけではない．

今までに（実質的には）出てきた同型を明示しよう．上に述べたことから線型双対ということだけ見ればよい．

3.2.3

(i) 線型空間 X の基底 A について

$$\mathbb{R}^A \to X; \quad (\xi^a)_{a\in A} \mapsto \sum_{a\in A} \xi^a a$$

は同型 (2.3.3).

(ii) 線型空間 X の枠 $(a_i)_{a\in \bar{n}}$ について

$$\mathbb{R}^n \to X; \quad (\xi^i)_{i\in \bar{n}} \mapsto \sum_{i\in \bar{n}} \xi^i a_i$$

は同型 (2.3.3).

(iii) 有限集合 A の形式的線型結合の空間 X について

$$\mathbb{R}^A \to X; \quad (\xi^a)_{a\in A} = \sum_{a\in A} \xi^a \delta_a \mapsto \sum_{a\in A} \xi^a a$$

は標準的に同型．$X = \mathbb{R}^A$ と考える (2.4.1).

(iv) 有限集合 A の元に番号をつけることで（いいかえると $\bar{n}$ から A への双射を指定することで），$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^A$ は同型．

3.3　線型写像の合成

X, Y, Z を線型空間とする．

$f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ が線型ならば，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ も線型である[*3]．

最も基本的な事実であるが，ほとんど自明である．同じく自明な命題として：恒等変換 $1_X\colon X \to X$ は線型である．

[*3] $g \circ f$ のかわりに gf と書くことも多い．これも一種の積である ((4.3.3), (3.11.1))

3.4 用語について

一般にある数学的構造と両立する写像をそのカテゴリーにおける**型射**（morphism）という．線型理論では線型写像が型射である．

線型写像 $f\colon X \to Y$ が単射であるとき, f は**線型単射**（linear inejction）あるいは**単型射**（monomorphism）という．

線型写像 f が上射であるとき，**線型上射**（linear surjection）あるいは**上型射**（epimorphism）という．

f が双射のとき，つまり線型双射（linear bijection）のとき，f は同型（isomorphism）となるのであった．ゴロ合わせをするならば，同型車というべきかもしれない．ラテン系の接頭語 in-，sur-，bi-にかわって，ギリシャ系の mono-，epi-，iso-を使うのはなによりまず morphism がギリシャ語からきているという造語法の問題である．

3.5 部分線型空間

X を線型空間とし，$M \subset X$ を部分集合とする．X の演算を M に制限して M 自身が線型空間になるとき，M は X の部分線型空間であるという．

3.5.1 M が X の部分線型空間であるためには,

1. $x, y \in M$ ならば $x + y \in M$
2. $x \in M, \lambda \in M$ ならば $\lambda x \in M$
3. $0 \in M$

の三条件がみたされることが必要かつ十分である．

これを示すには,

$$x \in M \Rightarrow -x \in M$$

だけをいえばよい．なぜなら，線型空間の公理は (L.4) 以外，X で成り

立てば M でも自動的に成り立つからである．

さて，$x \in M$ のとき，$-x = (-1)x$ だから，(ii) により $-x \in M$ ■

条件 (iii) をおとすことはできない．なぜなら，(i)，(ii) だけなら空集合 $\emptyset$ が満足する．ところが $\emptyset$ はもちろん 0 も含まないから線型空間とはならない．「M が空でなくて」と断れば (iii) は不用だが，空でないことは (iii) を示すためにだけ使うのだから，はじめから (iii) を条件に入いれておいた方がよい[*4]．

3.5.2　少し違った表現として：

> $M \subset X$ が部分線型空間であるためには，$0 \in M$ であり，任意の $x, y \in M$ に対してその線型結合 $\lambda x + \mu y$ がすべて M に属することが必要かつ十分である． ■

3.5.3　X の部分線型空間 M について，包含写像 $\iota\colon M \to X$ $x \mapsto$ を**標準単射**という[*5]．M の元 x を X の元とみたのが ιx である．同じ x だが，M が r 次元で X が n 次元（$n > r$）のとき，$x \in M$ は $\mathbb{R}^r$ のベクトルで表現され，$\iota x \in X$ は $\mathbb{R}^n$ のベクトルで表現されるというような差がある (7.4)．

標準単射 $\iota\colon M \to X$ は線型である．そればかりでなく，M の部分線型空間としての線型構造は ι が線型となるような唯一の線型構造である．つまり，部分集合 $M \subset X$ がそれ自身線型空間であるとき，標準単射 ι が線型ならば，M の線型構造は X の部分線型空間としての線型構造である．

実際，M における和を $x + y$，スカラー倍を $\lambda \cdot x$ と書いて，x の演

[*4] A が空でないと断らず，条件 (iii) もおとしている教科書が多い．

[*5] the canonical injection．説明しなくても何のことか意味が通じるような，自然な単射のことを，いつもそう呼ぶ．

算と区別すれば，ι が線型であることは

$$\iota(x+y)=\iota x+\iota y,\quad \iota(\lambda\cdot x)=\lambda(x)$$

とあらわされる．ところが，ι 記号は取り去ってよいから（ιx は同じ x を M でなく X で考えたもの），

$$x\dot{+}y=x+y,\quad \lambda\cdot x=\lambda x$$

となり，M の演算は X の演算を M に制限したものとなる．

3.5.4 X を線型空間とする．$\{0\}$ と X 自身はともに X の部分線型空間である．

3.5.5 $X\subset M\subset N$ で，M が X の部分線型空間，N が M の部分線型空間ならば，N は X の部分線型空間である．

これは線型写像の合成の定理 (3.3) の特別の場合とみられるが（大ゲサだが）．

3.6 線型写像の核と像

X,Y を線型空間，$f\colon X\to Y$ を線型写像とする．

$$f(X)=\{y\in Y\mid \exists x\in X\colon fx=y\}$$

を f の**像**（あるいは f における X の像）という．$x\in X$ に対する値 fx の全体の集合である[*6]．

$$f^{-1}\{0\}=\{x\in X\mid fx=0\}$$

を f の**核**という．

像 $f(X)$ を $\operatorname{im} f$，核 $f^{-1}\{0\}$ を $\ker f$ と書く[*7]．

3.6.1 $\operatorname{im} f$ について：$f(0)=0$ だから $0\in\operatorname{im} f$．$y,y'\in\operatorname{im} f$ のとき，$fx=y, fx'=y'$ なる $x,x'\in X$ が存在し，$f(\lambda x+\mu x')=$

[*6] カッコを省略して $f(x)$ のかわりに fx と書く．

[*7] the image of f, the kernel of f からきた記号．

$\lambda(fx)+\mu(fx')=\lambda y+\mu y'$ だから $\lambda y+\mu y'\in \operatorname{im} f$．(3.5.2) により，$\operatorname{im} f$ は Y の部分空間である．$\ker f$ について：省略．■

このような命題は定義からそのままでてくる．ほとんど自明といえるようなものである．だから，証明をつけることは新しい概念を身につけるための練習問題と考え，慣れない読者はここに書かれた証明を見ないで，自力であって見なければ意味がない．ここに書いた証明は念のためにつけた “解答” である．

命題自身はきわめて基本的で，今後絶えず使うことになる．

3.6.2　$f\colon X\to Y$ が線型のとき

fが $\Longleftrightarrow \ker f=\{0\}$

である．

実際，$x,x'\in X$ に対して

$$fx=fx' \Longleftrightarrow f(x-x')=0$$
$$\Longleftrightarrow x-x'\in\ker f$$

だから，$\ker f=\{0\}$ ならば

$$fx=fx' \Longleftrightarrow x=x'$$

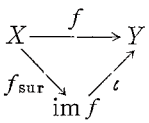
となり，f は単射である．$\Rightarrow$ は自明 ■

もちろん，f が線型でなければ，$f^{-1}\{0\}=\{0\}$ でも f は単射とは限らない．

3.6.3　$f\colon X\to Y$ が線型のとき，f を $\operatorname{im} f$ への写像と考えたもの

$f_{\mathrm{sur}}\colon X\to \operatorname{im} f$

は明らかに線型で，$\iota\colon \operatorname{im} f\to Y$ を標準単射として左の図式は可換である．



f_{sur} は f made surjective（上射に変えられた f）の略である．実際には f_{sur} を f と記号の上では区別しないことが多い．なお，(9.1.2) を参照のこと．

3.7 線型写像の線型空間

線型代数では，はじめに存在する線型空間から，次々と新しい線型空間を構成していく．線型空間の直積（第 5 章），商線型空間（第 9 章）などの他に，二つの線型空間 X, Y に対して，線型写像 $f\colon X \to Y$ の全体よりなる線型空間 $L(X;Y)$ もその例である．

3.7.1 演算の定義 $f, g \in L(X;Y), \alpha \in \mathbb{R}$ に対し，和 $f+g$ と積 αf は，値をとる空間（値域）Y の演算を用いて自然に定義できる．すなわち，$x \in X$ に対して

$$(f+g)x = fx + gx, \quad (\alpha f)x = \alpha(fx)$$

とおく．

この定義では，f, g が線型であることは全然使われていないが，次に f, g が線型であるとすれば，$f+g$ と αf は線型である．

実際，

$$\begin{aligned}
(f+g)(\lambda x+\mu x') &= (\lambda x+\mu x') + g(\lambda x+\mu x') && (f+g \text{ の定義})\\
&= (\lambda(fx)+\mu(fx')) + (\lambda(gx)+\mu(gx')) && (f, g \text{ は線型})\\
&= \lambda(fx+gx)+\mu(fx'+gx') && (Y \text{ での演算の規則})\\
&= \lambda((f+g)x)+\mu((f+g)x') && (f+g \text{ の定義})\\
(\alpha f)(\lambda x+\mu x') &= \alpha(f(\lambda x+\mu x')) && (\alpha f \text{ の定義})\\
&= \alpha(\lambda(fx)+\mu(fx')) && (f \text{ は線型})\\
&= \lambda(\alpha(fx))+\mu(\alpha(fx')) && (Y \text{ での演算の規則})\\
&= \lambda((\alpha f)x)+\mu((\alpha f)x') && (\alpha f \text{ の定義})
\end{aligned}$$

となり，線型の条件 (3.1.1) が確かめられた． ■

αf が線型であることの証明では，$\mathbb{R}$ の乗法の可換性が使われていることに注意する．

このような証明は，計算として “やさしすぎる” という正にそのことに

よって，各段階で何が問題なのかボヤケテしまいがちである．証明をする以上テイネイにやらねばならない．

写像の作用にカッコをつけて，例えば $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ あるいは $= \lambda(f(x))$ と書くよりは，$f(\lambda x) = \lambda(fx)$ と書く方が，無駄なく正確で，上のような計算（写像算！）では考えやすい．

3.7.2　線型空間 $L(X;Y)$　上で示したのは X から Y への任意の写像の全体 Y^X に和とスカラー倍が定義できて[*8]，$L(X;Y) \subset Y^X$ がこの二つの演算に関して閉じているということであった．すなわち

$$f, g \in L(X;Y) \Rightarrow f + g, \alpha f \in L(X;Y)$$

この演算に関して $L(X;Y)$ が公理 (L.1)〜(L.8) をみたすことはやってみれば容易にわかり，$L(X;Y)$ は線型空間になる．

実は Y^X が線型空間で，$L(X;Y)$ はその部分線型空間となっているのである．

3.7.3　Y^X の演算の定義 $(f+g)x = fx + gx, (\alpha f)x = \alpha(fx)$ は，写像 $Y^X \to Y; f \mapsto f_X$ が線型という条件そのものである．

3.8　線型空間としての $\mathbb{R}$

実数の集合 $\mathbb{R}$ は体としての構造の他に，実数体 $\mathbb{R}$ 上の線型空間としての構造をもつ．スカラー $\lambda \in \mathbb{R}$ とベクトル $x \in \mathbb{R}$ の積 λx を普通の実数の積で与えればよい．

ベクトルとしての $x, \lambda x$ は同じ種類の量をあらわし，スカラー λ はこの二つの量の比をあらわすと考えられる (4.1)．

0 以外の任意の実数は線型空間 $\mathbb{R}$ の枠となるが，特に 1 は標準的な枠とみなされる．$\{1\}$ が標準的な基底であるといってもよい．任意の実数 x は一意的に $x = x \cdot 1$ とあらわされる[*9]．

[*8] それは $\mathbb{R}^A$ の演算の定義と同じようである．

[*9] $x1$ でもよいが，$x \cdot 1$ のように “積” 一般をあらわす黒丸 $\cdot$ を間にいれることも

3.9 $\mathbb{R}$ からの線型写像

線型空間 $\mathbb{R}$ から他の任意の線型空間 X への線型写像全体の線型空間 $L(\mathbb{R};X)$ は X と標準的に同型である.

証明. 写像

$$\psi\colon L(\mathbb{R};X)\to X;\quad f\mapsto f\cdot 1$$

は線型である (3.7.3).

$\xi\in\mathbb{R}$ に対し, $f\xi=f(\xi\cdot 1)=\xi(f\cdot 1)$ だから[*10], f は $f\cdot 1$ で決まり, ψ は単射である.

$v\in X$ に対し $v_{\mathbb{R}}\in X^{\mathbb{R}}$ を $\xi\mapsto\xi_v$ で定義すれば, $v_{\mathbb{R}}$ は線型, すなわち $\in L(\mathbb{R};X)$ で, $v_{\mathbb{R}}\cdot 1=v$ だから, ψ は上射である. ■

3.9.1 注意 (i) f が線型ならば, $f\cdot 1=v$ として $f=v_{\mathbb{R}}$ 以外であり得ない (ψ が単射の意味).

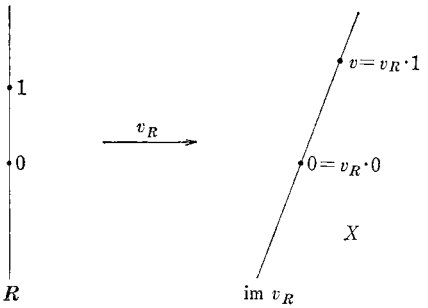
(ii) $f\in X^{\mathbb{R}}$ に対して

$$f\text{がスカラー倍を保存}\Rightarrow f=f(f\cdot 1)_{\mathbb{R}}$$
$$\Rightarrow f\text{は線型}$$

となるから, $\mathbb{R}$ からの線型写像はスカラー倍の保存だけで特徴付けられる.

ある

[*10] 線型写像のベクトルに対する作用も一種の積であり (4.3.2), $f(1)=f1=f\cdot 1$ のように書くことが許される.



3.9.2 $v \neq 0 \Longleftrightarrow v_{\mathbb{R}}$ が単射.

証明. $v \neq 0$ ならば, $v_{\mathbb{R}}\xi = \xi_v = 0$ より $\xi = 0$ がでる ((2.5) の (iii)). したがって, $v_{\mathbb{R}}$ は単射 (3.7.2). $v = 0$ ならば, $\ker v_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ となり, $v_{\mathbb{R}}$ は単射ではない.

このときは, $\mathbb{R}$ と $\operatorname{im} v_{\mathbb{R}}$ が同型となる (3.7.3). 直感的には X の原点 0 と v を結ぶ直線が $\operatorname{im} v_{\mathbb{R}}$ である.

3.10 線型変換

始域 (定義域) と終域 (値域) が一致する場合の線型写像, すなわち, 線型空間 X に対する $L(X;X)$ の元を X 上の線型変換という. X 上の自己型射 (endomorphism) ともいう. $L(X;X)$ を $L(X)$ あるいは $\operatorname{End}(X)$ と書くこともある.

X 上の変換が同型写像 (X から X 自身の上への) であるとき, **自己同型** (automorphism) と呼ばれる. その全体を $\mathrm{GL}(X)$ あるいは $\operatorname{Aut}(X)$ と書く.

3.10.1 線型写像の合成 (続) X, Y, Z を線型空間, $f, f_1, f_2 \in L(X;Y), g, g_1, g_2 \in L(Y;Z), \alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき,

1. $g(f_1+f_2)=gf_1+gf_2$
2. $(g_1+g_2)f=g_1f+g_2f$
3. $g(\alpha f)=(\alpha g)f=\alpha(gf)$

すべて自明に近いが，例えば (i) は，任意の $x\in X$ に対して

$$\begin{aligned}(g(f_1+f_2))x &= g((f_1+f_2)x) && \text{（合成の定義）}\\ &= g(f_1x+f_2x) && \text{（和の定義）}\\ &= g(f_1x)+g(f_2x) && \text{（}g\text{ が線型）}\\ &= (gf_1)x+(gf_2)x && \text{（合成の定義）}\\ &= (gf_1x+gf_2)x && \text{（和の定義）}\end{aligned}$$

となる．■

3.10.2　とくに $X=Y=Z$ とおくと，合成 $(g,f)\mapsto gf$ で $\mathrm{End}(X)$ に積が定義され，$\mathrm{End}(X)$ は（線型空間であるのはもちろんだが）和と積に関して環となる[*11]．(3.10.1) の (i)，(ii) は分配率である．三個の線型変換の積に関する結合率 $h(gf)=(hg)f$ は定義から明らかである．恒等変換 $1x$ が乗法に関する単位元となる．一般には $gf\neq fg$ だから非可換な環である．

$\mathrm{End}(X)$ の線型空間としての構造，環としての構造はさらに (3.10.1) の (iii) で結びつけられている．このようなものを**線型環** (linear algebra) という[*12]．

3.10.3　**倍変換**　$\alpha\in\mathbb{R}$ に対し，X の線型変換 α_X を

$$\alpha_X\colon X\to X;\quad x\mapsto \alpha x$$

で定義する．α_X が線型であることは (L.6) と (L.7) と，$\mathbb{R}$ の乗法の可換性からでる．α_X を倍率 α の**倍変換** (homothety) という．

$\alpha\in\mathbb{R}$ と $f\in\mathrm{End}(X)$ に対して $\alpha f=\alpha_X f$ である．いいかえると，スカラー倍は環 $\mathrm{End}(X)$ の内部の積（変換の合成）におきかえられる［α_X

[*11] 環の定義をあらかじめ知っている必要はない（なお (6.3) を参照のこと）．

[*12] algebra とあっても“代数学”ではなく，線型空間や環と同列の“代数系”というほどの述語である．

は α を成分とする対角行列で表現される (5.5)，(7.7)］.

$$(\alpha+\beta)_X = \alpha_X + \beta_X, \quad (\alpha\beta)_X = \alpha_X\beta_X = \alpha\beta_X$$

だから，写像

$$\alpha \mapsto \alpha_X; \quad \mathbb{R} \to \mathrm{End}(X)$$

は，和と積を保存し，線型かつ環としての型射となる.

また $\mathbb{R}$ の単位 1 は恒等変換 1_X にうつされるが，これが環 $\mathrm{End}(X)$ の乗法の単位元である（$1_X = 1_X$ ！）.

さらに，$X \neq \{0\}$ ならば $\alpha \mapsto \alpha_X$ は単射である．実際，$\alpha_X = 0$ とは，すべての $x \in X$ に対し $\alpha_X x = \alpha x = 0$ となることであるが，仮定から 0 でない x があるから，(2.5) の (iii) により $\alpha = 0$ である．(3.6.2) により，このとき $\alpha \mapsto \alpha_X$ は単射である.

ひき続き $X \neq \{0\}$ ならば $h\colon \alpha \mapsto \alpha_X$ の像 $\mathrm{im}\, h = \{\alpha_X \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ は $\mathrm{End}(X)$ の部分体である．いいかえると，このとき，(i)$1_X \neq 0_X$ で，(ii) $\alpha \neq 0$ に対する α_X は X の自己同型，つまり $\mathrm{End}(X)$ の可逆な元である．α の逆数 α^{-1} を倍率にもつ $(\alpha^{-1})_X$ が α_X の逆同型 $(\alpha_X)^{-1}$ に等しく，これは単に α_X^{-1} と書いてよい．h によって体 $\mathrm{im}\, h$ は実数体 $\mathbb{R}$ と同型である.

3.10.4　体 $\mathrm{End}(\mathbb{R})$　線型空間 X のスカラー乗法

$$\mathbb{R} \times X \to X; \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

において，ベクトル x を v に固定したときの偏写像が線型写像

$$v_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to X; \quad \lambda \mapsto \lambda v$$

であり，スカラー λ を α に固定したときの偏写像が倍変換

$$\alpha_X\colon X \to X; \quad x \mapsto \alpha x$$

であった（倍変換とは “スカラーの作用” というに等しい）．そして

$$\psi^{-1}\colon X \to L(\mathbb{R}; X); \quad v \mapsto v_{\mathbb{R}}$$

が同型（線型双射），

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}(X) = L(X; X); \quad \alpha \mapsto \alpha_X$$

が体 $\mathbb{R}$ と倍変換全体の部分体 $\operatorname{im} h$ の（体としての）同型を与えるのであった[*13].

とくに $X = \mathbb{R}$ のときは $L(\mathbb{R}; X) = \operatorname{End}(X)$，かつ $\psi^{-1} = h$ となる．すなわち，“ベクトル”ξ が定める線型写像 $t = t \cdot 1 \mapsto t\xi$ と，“スカラー”ξ が定める倍変換 $t \mapsto \xi t$ は一致し，どちらも $\xi_{\mathbb{R}}$ でまぎらわしいのは，かえって具合が良いことになる．この場合 $\operatorname{End}(\mathbb{R})$ 自身が実数体 $\mathbb{R}$ と同型になる．

3.10.5　$\operatorname{End}\mathbb{R}$ の右作用

$\xi \in \mathbb{R}$ と $v \in X$ に対し

(*)　$v_{\mathbb{R}}\xi_{\mathbb{R}} = \xi_X v_{\mathbb{R}} = \xi v_{\mathbb{R}}$

である．これは $L(\mathbb{R}; X)$ における等式で，$1 \in \mathbb{R}$ に対する値をとることで X における等式 $v_{\mathbb{R}}\xi = \xi v$ が得られる．

$$\begin{array}{ccc} 1 \in \boldsymbol{R} & \xrightarrow{\xi_{\boldsymbol{R}}} & \boldsymbol{R} \ni \xi \\ \downarrow{\scriptstyle v_{\boldsymbol{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle v_{\boldsymbol{R}}} \\ v \in X & \xrightarrow[\xi_X]{} & X \ni \xi v \end{array}$$

$v_{\mathbb{R}}\xi_{\mathbb{R}}$ は，スカラー $\xi_{\mathbb{R}} \in \operatorname{End}(\mathbb{R})$ の右からの作用と考えるのが自然で，$L(\mathbb{R}; X)$ は左 $\mathbb{R}$-線型空間であると同時に右 $\operatorname{End}(\mathbb{R})$-線型空間とみなされる．そして $\mathbb{R}$ と $\operatorname{End}(\mathbb{R})$ の同一視によって左右からの作用は一致する．

線型代数の計算は $L(\mathbb{R}; X)$ を X と同一視して $v_{\mathbb{R}}$ を v と書き，$\operatorname{End}(\mathbb{R})$ を体 $\mathbb{R}$ と同一視して $\xi_{\mathbb{R}}$ を ξ と書くこと基礎に成り立っている．$v_{\mathbb{R}}\xi_{\mathbb{R}} = \xi v_{\mathbb{R}}$ も $v_{\mathbb{R}}\xi = \xi v$ と書くことを基礎に成り立っている．$v_{\mathbb{R}}\xi_{\mathbb{R}} = \xi v_{\mathbb{R}}$ も $v_{\mathbb{R}}\xi = \xi v$ も単に

(**)　$v\xi = \xi v$

と書かれる．そして $v\xi$ という式は，$v_{\mathbb{R}}$ の右からの $\xi_{\mathbb{R}}$ 倍，あるいは “ベクトル”ξ に対する $v_{\mathbb{R}}$ の値と，状況に応じて解釈される．同一視の結果，見かけ上は X に右および左からのスカラー乗法があって (**) のように両者が一致する（スカラー乗法の可換律！）．

[*13] $X \neq \{0\}$ と仮定する．(4.3.8) でもう一度ふれる．

ここでは厳密さを強調しているのではなく，むしろ反対に，自由で柔軟な態度—式というものを固定的に考えないで状況に応じて適当に解釈するという—の必要をいっているのである．