赤摂也／広瀬健 編

現代数学への序章 **3**

線型代数

小島　順

昭和 51 年 5 月 10 日　第 1 刷発行
1976 © Jun Kojima
発行所　日本放送出版協会

組版作業者から利用者へのお願い
各章ごとに分割した PDF ファイルです。章をまたがるハイパーリンクは機能しません。

集合と写像の述語と記号について

集合 A が集合 B に含まれることを $A \subset B$ と書き，文部省式に $A \subseteqq B$ とは書かない．A が B の真部分集合であることを $A \subsetneqq B$ と書く．

A と B がある集合 X の部分集合のとき，$A \cup B$ を合併，$A \cap B$ を共通部分と呼び，結び，交わりと呼ばない．

写像 $f\colon X \to Y$，すなわち X で定義され Y に値をとる写像 f が，$x \in X$ を $y \in Y$ にうつすとき，$f(x) = y$ を $f\colon x \mapsto y$ と書く（元の対応は $\to$ でなく $\mapsto$ を使う）．X を f の定義域（domain），Y を f の値域（range）と呼んだが，f の像

$$\operatorname{im} f = \{y \in Y \mid f(x) = y \,\text{for some}\, x \in X\}$$

を f の値域と呼ぶ人達がいるので（文部省，岩波数学辞典第二版），混乱をさけるためには別の呼び方がよかった．迷った結果，X を始域，Y を終域と書いたところがある．X を source（みなもと），Y を target（まと）と呼ぶ流儀もある[*13]．$\operatorname{im} f$ を値域と呼ぶ人達は Y に名前をつけないようである．

“$f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$” のとき f は単射であると言う．$\operatorname{im} f = Y$ のとき f は上射であると言う（全射は使わない）．f が単射かつ上射の

[*13] Porteous [1] は source を domain より広く，例えば分数関数 $f\colon x \mapsto 1/x$ を $f\colon \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ と書き，$\mathbb{R}$ を source，$\mathbb{R} - \{0\}$ を domain と呼ぶような使いわけをしている

とき双射と言う（全単射は使わない）．f が単射のとき，X から $\operatorname{im} f$ への双射 f_{bij} が定まる (9.1.2)．target Y にも名前をつけない人達は単射 f を 1 対 1 写像と呼ぶが，双射に近い互換をもつ 1 対 1 を単射の意味に使うのは，彼等が f を事実上 $\operatorname{im} f$ への双射 f_{bij} におきかえて考えるからであろう．f が双射のとき逆写像 f^{-1} が定義できる．

$X = Y$ のときの写像 $f\colon X \to X$ を X の変換と言い，とくに f が双射のとき X の置換と言う．X の置換の全体を $X!$ と書いた．

有限集合 A に対して $\#A$ は A の濃度，すなわち A に含まれる元の個数を示す．$\#(A!) = (\#A)!$ である．

集合 X の部分集合の全体を $\mathscr{P}(X)$ と書く．任意の写像 $f\colon X \to Y$ に対する

$$f^{-1}\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$$

が，$B \in \mathscr{P}(Y)$ に逆像 $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を対応させることで定義される．f が双射のときの $f^{-1}\colon Y \to X$ と区別するために，Porteous［1］にならって $f^{\dashv}$ という記号を使う．彼は同様に $f_{\vdash}\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ を定義するが，こちらは f で間に合わせた．$f^{\dashv}$ は $f = f_{\vdash}$ の逆写像ではない．

あと，標準的でない記号は本文中で説明する．

記号一覧

底本は二段組.

$\bar{n}$	2
$\mathbb{R}^A$	15
δ^i_j	18
$\mathrm{im}\, f$	33
$\ker f$	33
fx	33
f_{sur}	34
$L(X;Y)$	35
$v_{\mathbb{R}}$	37
$L(X)$	38
$\mathrm{End}(X)$	38
α_X	39
wv^{-1}	46
$L_2(X,Y;Z)$	50
f^s	51
f^d	52
δ	52
X^*	55
v^{-1}	55
$a \otimes b$	58

$X^* \otimes Y^*$	60
$x \otimes y$	59
$X \otimes Y$	58
$Y \otimes X^*$	62
ρ^i	65
π^i	66
$X_1 \oplus X_2$	69
ι_i	69
θ^j	69
ρ_j	70
f^i_j	75
$\mathbb{R}^{\bar{m}\times\bar{n}}$	81
δ_j	83
δ^j	82
$v_1 \times v_2$	84
ε_i	88
ε^i	88
g_*	96
f^*	97
$\operatorname{im} A$	101
$v_{\mathbb{R}^n}$	104
$\operatorname{col} v$	103
$\operatorname{im} v$	104
$X_1 + X_2$	105
$\mathbb{R}a$	111
v^i	115
$(v^{-1})^i$	115
∂	132
δ, ∂^*	133

θ	143
θ_a	143
$\vec{X}$	144
τ^h	154
$\vec{f}$	159
$\operatorname{coim} f$	166
f_{inj}	166
f_{bij}	166
X/W	171
$\operatorname{rk} f$	197
$\operatorname{codim} W$	198
W^0	206
${}^{\lambda}e^i$	222
${}^{\lambda}e^{ij}$	222
p^{ij}	222
${}^{\lambda}e_i$	231
${}^{\lambda}e_{ij}$	231
p_{ij}	231
$\mathbb{R}(n)$	249
det	249
$\operatorname{sgn} \pi$	253
E_λ	267
$X_{\mathbb{C}}$	283
$Y_{\mathbb{R}}$	284
$h^{\mathbb{R}}$	284
$f^{\mathbb{C}}$	285
φ^t	297
φ_x	297
$L_2^s(X, X; \mathbb{R})$	315

q'	317
$\tilde{\varphi}$	318
x^{φ}	318
τ	318
x^{τ}	318
$(x \mid y)$	320
$W^{\perp}$	321
f^{a}	336
$\hat{\psi}$	355
dq	359
grad	361
f^{-1}	368
$\#A$	368
$\mathscr{P}(X)$	368

あとがき

この本を書く上で参考にした本の中から主なものをあげると

［1］I. R. Porteous, *Topological Geometry*, Van Nostrand (1969)
［2］R. Godement, *Cours d'algèbre*. Hermann, Paris (1966)（英語訳：*Algebra*. Hermann (1968)）
［3］ブルバキ数学原論「代数 2（第 2 章：線型代数）」，東京図書.
［4］—「代数 7（第 9 章：準双線型形式と二次形式」），東京図書.
［5］J. Frenkel, *Géomeètrie pour l'élève-professeur*. Hermann (1973)
［6］ディュドネ，「線型代数と初等幾何」（雨宮一郎訳），東京図書.
［7］M. W. Hirsh and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press (1974).
［8］V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations* (tr. by R. A. Silverman) M.I.T. Press (1973).
［9］D. W. Blackett, *Elementary Topology*. Academic Press (1967).
［10］L. H. Loomis, S. Sternberg, *Advanced calculus*. Addison-Wesley (1968).

[1] は固有値に関係することは全く欠いているが，学ぶところが大変多かった．本書の第 8，9，14，16 章をはじめ，いたるところにその影響がある．角の扱いは［5］，［6］に学んだ．固有値問題を微分方程式と結びつけた第 15 章は［7］，［8］によるところが多い．とくに［7］は表題か

らも察せられるように，現在発展中の微分力学系の入門書でもあり，線型代数のこの面での役割（と限界）がよくうかがわれる．複素化についてはより深い分析が［5］にある．回路の実例 (12.2) は［9］からとった．回路上の実際の力学系については，［7］および

［11］S. Smale, “On the mathematical foundations of electrical circuit theory”, *J. Differential Goemetry* **7** (1972) p 193–210.
［12］S. Lefschets, *Applications of Algebraic Topology*, (Applied Math. Sci, v. 16) Springer (1975).

に詳しい．

量の分析については

［13］銀林浩,「量の世界—構造主義的分析」(教育文庫 8)．麦書房 (1975)
［14］森毅・竹内啓,「数学の世界」．(中公新書，1973)
［15］森毅,「解析学」(現代数学への序章 2)．日本放送出版協会 (1974)
［16］高橋利衛,「基礎工学セミナー」，現代数学社 (1974)
［17］遠山啓,「教師のための数学入門 (数量編)」．国土社 (1960)．

などが参考になった．

かけた部分があることをあまり気にせず,「意味をつかむこと」に集中できるのも，読者が（おそらく）この本だけで線型代数を学ぶのではないことに頼っている面があるわけで，よく使われる教科書の一つとして

［18］斎藤正彦,「線型代数入門」，東大出版会

をあげておく．

第 17 章で使った多変数の微分法については

［19］M. Spivak, *Calculus on Manifolds*. Benjamin (1965)（斎藤正彦訳,「多変数解析学」，東京図書）
［20］山崎圭次郎,「教本・講義の対照による現代微積分」，現代数学社．

あるいは［1］，［10］などを参照されたい．

日本語で書かれた線型代数の本で，テンソル積について参考にできるのは

［21］佐武一郎，「線型代数学（行列と行列式　増補改題）」．裳華房．

である．

追　記

部分的に手を加えるという作業を何回となく繰返してこの本はでき上ったので，章のわけかた，番号のつけ方など，全体としてはあまり整っていない．例えば，後とのつり合いを考えると最初の三つの章は一つにまとめるべきだった．

編者である赤，広瀬両氏には始終いろいろな面で助けていただいた．早稲田大学の辰田典子さんは原稿の一部を読み，種々の助言をしてくださった．妻の章子は第 15 章以下の図の下図を書いてくれた．編集部の方々，とくに竹内幸彦氏には大変お世話になった．その他，助けてくれた方がたも含めて，心から感謝する．

（1976 年 4 月 13 日）

小島　順（こじま・じゅん）

1932 年		福岡県に生まれる
1955 年		九州大学理学部数学科卒
専	門	数学（トポロジー，多様体論）
現	在[*14]	早稲田大学理工学部助教授
訳	書	ブルバキ「数学言論　実一変数関数　1，2」（共訳，東京図書）
		シュヴァルツ「解析学」2，5（東京図書）

[*14] 注意：底本刊行時（1976 年当時）である．近況は http://math.oshirase.com をご覧ください．

索引

あ

跡, 277
アフィン空間, 143
アフィン結合, 148
アフィン座標, 154
アフィン写像, 159
アフィン生成, 153
アフィン独立, 152
安定, 281
鞍点, 301

い

一意的に従属, 17
一次形式, 56, 116
1 次元, 43
一般解, 178, 203
一般内積, 321

う

運動ネルギー, 363
運動量, 363

え

枝, 21
n-空間, 3
エルミート形式, 353

か

階数, 197
解（線型方程式の）, 178
回転運動, 365
回転（角に対する）, 348
回転群, 340
回路, 21, 131, 215
ガウスの方法, 330
可逆, 29
核, 33
角, 345
解空間, 178
拡大（指数関数的）, 305
渦状点, 300
渦心点, 302
型射, 31
加法, 5, 14
完全系列, 176
完全不安定, 301

き

奇置換, 253
基底, 19
軌道, 297
基本変形（左からの）, 221
基本変形（右からの）, 231
既約, 281
逆行列, 239
行, 76
鏡映, 342
境界作用素, 131
共変的, 57, 127
共役作用素, 286
行列, 81
行列式, 249
行列式（線型変換の）, 261
行列表示, 76
極小生成集合, 184
極大独立集合, 184
キルヒホフの電圧法則, 138
キルヒホフの電流法則, 136

く

偶置換, 253
グラフ, 170
グラム・シュミットの直交化, 339
クロネッカーのデルタ, 18

け

形式的線型結合, 20
係数系, 17
係数体, 14
消す, 207
結節点, 297
原点, 4

こ

交代 n-線型形式, 253
交代変換, 364
勾配, 361
公理的, 15
互換, 259
コサイクル（0-）, 136
コバウンダリ, 133
コバウンダリ（1-）, 135
固有空間, 267
固有値, 267
固有値（対称形式の）, 356
固有値（二次形式の）, 362
固有ベクトル, 267

さ

サイクル（1-）, 136
再双対空間, 56, 121
再双対空間（1 次元線型空間に値をとる）, 54
最大値ノルム, 338
再零化空間, 208
座標関数, 55
座標系, 57
座標形式（枠に関する）, 115

し

始域, 367
時間, 44, 146
軸正ベクトル, 365
次元, 108, 181, 187
次元（アフィン空間の）, 146
自己型射, 38
時刻, 146
自己随伴変換, 352
自己同型, 38
指数関数（線型変換の）, 294
実 n 空間, 3
実数体, 8
実数値関数の空間, 15
実数の n-組, 2
射影, 66
終域, 367
重心, 148
重心座標, 154
自由ベクトル, 167
縮少（指数関数的）, 304
縮約, 63, 247
巡回置換, 258
準内積, 321
上型射, 31
商空間, 171
上射, 368
商集合, 165
焦点, 298
ジョルダン標準形, 279
シルヴェスタ, 326

す

吸いこみ, 304
随伴変換, 335
スカラー, 5
スカラー乗法, 5, 14

せ

正弦, 348
生成, 105, 106
生成的, 306
生成（部分空間の有限族が）, 107
生成（有限部分集合が）, 101
正の向き, 263
正比例, 45
成分, 2, 66
成分関数, 66
積, 5, 14, 49
積（行列の）, 89
積分曲面, 361
接繊維空間, 308

接続点, 21
節点, 21
接ベクトル, 168
ゼロ, 8, 14
0-バウンダリ, 133
ゼロベクトル, 7
繊維, 166
繊維空間, 168
漸近安定, 297
線型環, 39
線型空間, 13
線型結合（部分集合の）, 17
線型写像, 27
線型従属, 102
線型従属（ベクトルが部分集合に）, 17
線型上射, 31
線型双射, 31
線型像（ベクトルの族の）, 102
線型像（有限部分集合の）, 101
線型単射, 31
線型断面, 194
線型独立, 106
線型独立（アフィン写像の）, 159
線型独立（部分空間の和が）, 106
線型独立（ベクトルが部分集合と）, 181
線型独立（ベクトルの族が）, 102
線型変換, 38
線型方程式, 177, 202, 213

そ

像, 33
双一次形式, 60
双極的流れ, 305
相似（線型変換の）, 290
相似変換群, 345
双射, 368
双線型形式, 243
双線型写像, 48
双対空間, 55
双対空間（1 次元線型空間に値をとる）, 54
双対写像, 98
双対枠, 55, 115
双対枠（$\mathbb{R}^n$ の場合）, 83
速度, 44, 47
束縛ベクトル, 168
測度, 56

た

対角化（線型変換の）, 276
対角化（内積空間における二次形式の）, 356
対称相関, 318
対称双線型形式, 315
対称変換, 352
対称変換（対象形式に伴う）, 355
脱複素化, 284
単型射, 31
単射, 368
断面, 194

ち

値域, 367
チェイン（1-）, 21
チェイン（0-）, 21
力, 48, 96, 363
置換, 368
置換群の作用, 232
直積（集合の）, 3
直和（部分空間の有限族の）, 107
直和, 69, 105
直和分解, 69
直和分解（部分空間の有限族の）, 107
直角, 349
直交（双対との）, 208
直交（対象形式に関して）, 319
直交直和, 324
直交部分空間, 321
直交変換, 337
直交変換群, 339
直交枠, 324

つ

対, 1

て

定義域, 367
定数, 53
定符号対称形式, 320
テレヘンの定理, 137
点, 4

テンソル積, 58, 243, 245
テンソル（2 階共変対称）, 315
ß 転置, 318
転置, 336
転倒, 258

と

同値（関係に関して）, 175
導関数, 359
同型（写像）, 29
同型（線型空間の）, 29
同次方程式, 178
同値（線型写像の）, 128
同値（線型変換の）, 290
同値（対称形式の）, 328
同値類, 176
特性根, 276
特性方程式, 276
時計, 98
特殊解, 178

な

流れ, 296

に

二次形式, 316
二次形式の対角化, 330
ニュートンの第二法則, 364

の

濃度, 368
ノルム, 338

は

倍変換, 39
バウンダリ, 133
ハミルトン・ケイリーの定理, 279
反傾的, 97
反元, 14
半単純, 281
反ベクトル, 7
反変的, 57, 127

ひ

比, 44, 54
引戻し, 95
非退化双線型形式, 248
非退化対称形式, 319
微分, 359
微分形式, 359
微分方程式, 293
表現（アフィン写像の）, 160
表現（双対写像の）, 122
表現（直和分解に関する）, 119
表現（枠に関する）, 47, 117
標準上射（直和分解に関する）, 69
標準基底（$\mathbb{R}^A$ の）, 19
標準基底（$\mathbb{R}^n$ の）, 19
標準形, 202
標準形（線型変換の）, 291
標準上射（商空間の）, 172
標準上射（直積空間の）, 65
標準上射（部分空間のの）, 33
標準単射（直和分解に関する）, 69
標準的, 29
標準内積, 318
標準枠（$\mathbb{R}^n$）, 19
標準枠（$(\mathbb{R}^*)^*$ の）, 83

ふ

複素化（実空間の）, 283
複素化（実線型写像の）, 285
複素数, 344
複素数体, 283
複体, 21
複比例, 60
符号, 253, 257
符号型, 325
不動点, 274
部分アフィン空間, 156
部分接繊維空間（微分形式が定める）, 361
部分線型空間, 32
普遍被覆群, 349
普遍問題, 113
振子, 307, 352
分割, 165

へ

平角, 349
平均, 148

平行移動, 154
平衡点, 274
併進, 154
べき零, 281
ベクトル, 4, 14
ベクトル積, 365
ベクトル場, 170
ベクトル部分（ベクトル場の）, 170
辺, 21
変数, 53, 116

ほ

方向, 157
補空間, 193
ホモとピー類, 351

ま

前送り, 95

み

密度, 48

む

向き（$\mathbb{R}^n$ の）, 365
向き（線型空間の）, 264
無限小回転, 365

も

持上げ, 351

ゆ

有限次元, 108

よ

余境界作用素, 133
余弦, 346
余次元, 198
余像, 166

ら

ラグランジュの方法, 330
λ 倍, 5, 14

り

量の空間, 44

れ

零化空間, 206
列, 76
連立一次方程式, 179

わ

和, 5, 14, 105
湧き出し, 305
枠, 19, 104
枠づけ, 104
枠の取替, 57, 125
和（部分空間の有限族の）, 106