赤摂也／広瀬健 編

現代数学への序章 3

線型代数

小島　順

昭和 51 年 5 月 10 日　第 1 刷発行

発行所　日本放送出版協会

https://ndlonline.ndl.go.jp/#!/detail/R300000001-I000001131514-00

組版作業者から利用者へのお願い

底本と校正をしておりませんので，
誤字，誤植などの相違があれば，組版作業者の間違い

であることに注意してください.

- 底本の図版を流用したため本文の記号のスタイルや書体が一致しない，数式があります.
- 複雑な可換図式と複雑な行列，そして図は底本をスキャンしたものを入れています.
- アンダーラインの版面オーバーがあります.
- 行列の元でマイナス記号で揃える箇所で未調整の箇所はあります．`\phantom` を手で入れるか，どうか思案中（入れた箇所もある）.
- 全体に行間は均等（活版印刷の標準）になっているので真似した.
- 箇条書きは list 環境を使わずに表環境で作成したほうがいいか.
- 底本では，本文中の数式の前後に明確な空白があるが，現在は取り入れていない.
- 「証明.」は太字にしたが，底本のように 2 字下げにするか.
- 節見出しは 2 字下げ
- 項目見出しは番号が括弧で囲われていて（半角にした），行頭揃い．見出しにピリオドがなければ改行せず本文が続く．統一されているのわからない.

PDF 化は 2021 年 6 月 5 日より始め，本文から索引の作成は 9 月 7 日に終えました．現在は気が付いた誤植の訂正をします.

まえがき

この本は、少し大ゲサに言えば、公理主義的ないしカテゴリー論的な態度で（実係数かつ有限次元の）線型代数を扱った書物である。

われわれの世界は多種多様な線型空間にみちあふれている。そこでは、個々の線型空間の性質ばかりでなく，線型空間の相互の関係とか，全体の中での一つの線型空間の役割とかが問題とされる．例えば，Y を 1 次元線型空間とするとき，有限次元線型空間 X, Z が Y に関して互いに双対的（dual）であるという関係（それは $X \times Z$ から Y への非退化な双線型写像の存在で特徴づけられる）は，疑う余地もなく線型代数の最も本質的な概念の一つである．とくに，$Y = \mathbb{R}$ の場合，X と Y は普通の意味で互いに双対である（$X \simeq Z^*, Z \simeq X^*$）.

X と Y が任意の有限次元の線型空間のとき，X から Y への線型写像は，$\sum_{i,j} a^i_j w_i (v^{-1})^j$ あるいは $\sum_{i,j} a^i_j w_i \otimes (v^{-1})^j$ のように表現され，その全体の線型空間は，X の双対 X^* と Y とのテンソル積 $Y \otimes X^*$ と一致する（第 13 章）.

この本では “1 次元の線型代数” を第 4 章で一応かたづけ，1 次元空間の直和であるところの一般の有限次元空間を第 7 章以後におくという構成にした．第 4 章のテーマは，小学校以来の量の理論の計算を公理的線型代数の立場から見なおすということである．量の理論の多次元の場合への拡張が線型代数だ，と言われることが多いが，私の考えでは，量の理論そのものが 1 次元空間についての公理的線型代数という枠組によってのみ的確に表現できるのである．X がある量の 1 次元線型空間ならば，双

対空間 X^* はその量の測度の全体である．例えば X が時間，Y が（1 次元的）変位の空間ならば，$Y \otimes X^*$ の元であるところの速さは $a\,\mathrm{m}$ 秒$^{-1}$ のような表現をもつが，このような表現がそのまま，多次元空間の場合の上に書いた形の表現に拡張できるわけである．

第 4 章のような試みには二つの動機があった．一つは小・中学校における量の教育への関心からである．私の場合，それは直接的には，いま小学校 6 年生の息子の，算数の勉強や電気回路についての "単位つき計算" などの相手をした経験からきている．もう一つは，双対空間やテンソル積のような，基本的なわりに，大学の（というのは早大理工のことだが）数学科の学生にとっても必ずしもよく理解されているとはいえない概念を，まず 1 次元の場合に日常的レベルで感覚的にとらえるために，量の計算は最良の実例だと思ったからである．

第 5 章から第 12 章までは，線型写像の分類と標準形が大きなテーマである．それはまた，線型方程式の理論とも重なり合う．抽象的（と思われている）概念，例えば直積，直和，商空間などをはじめから正面に出して議論したが，その理由はやはり，"抽象化によって感覚化する" ということにある．一般次元での議論が抽象的方法をとることによって，平面から平面への線型写像と<u>同じ形</u>で扱える．その結果，幾何学的イメージを頭に（あるいは紙の上に）えがくことができ，数学がやさしいものとなる．具体例としては，回路の上で互いに双対なチェインとコチェインの空間を選んだ（例えば電流と電圧）．そして，理論が進む各段階でこの例での意味を考えた．これも単に線型代数の応用というよりは，理論そのものを感覚的に理解するための助けとすることを目ざしたものである．

固有値と題した第 15 章では線型<u>変換</u>の分類がテーマである．線型変換というときには，定義域と値域がたまたま一致したというのではなく，一般の線型写像とは分類の基準（すなわち同値の概念の選び方）が違うのである．線型写像が定義域，値域の次元と階数という三つの不変量によって完全に分類でき，あたかも<u>すべてが平面であるかのように</u>議論できたのにくらべて，線型変換の分類はかなり複雑であって，結局，組織的に調べたのは<u>平面の場合だけ</u>ということになった．しかし，勉強の順序

としては，このような，まず平面の場合をよく理解するという方針が正しいのではないかと思う（その点，普通の教科書はむずかし過ぎる！）.

続く第 16 章では，線型変換と並ぶ重要な対象である対称双線型形式（ないし二次形式）を扱う．X 上の対称形式 $\varphi \in X^* \otimes X^*$ は X から双対 X^* への "対称相関"$\tilde{\varphi}$ と標準的に同一視される．非退化な（すなわち $\tilde{\varphi}$ が同型な）φ は符号型 (p, q) で分類される．

最後の第 17 章は，一つの正定値対称形式すなわち内積 φ が構造としてそなわった線型空間 (X, φ) での議論である．内積空間では $\tilde{\varphi}$ によって双対 X^* の元が X の元でおきかえられ，線型変換が対称であるとか交代であるとかの概念が意味をもち，さらに，X 上の（φ とは別の）対称形式 ψ にはその随伴と呼ばれる対称変換 $\hat{\psi}$ が対応する．普通の本で二次形式の対角化と呼ばれているものの内容は，対称変換 $\hat{\psi}$ の固有値問題であって，そこでは実は<u>二つの</u>対称形式との相互関係が問題とされているのである．このような議論の前に，本書の第 16 章のような，対称形式そのものの分類を述べる方が筋が通ると思う．

さらに注意すべき点を列挙すると：

1. 全体として実係数線型空間を中心とし，そのために必要な程度で複素係数線型空間もとりあげた．その場所は第 15 章（部分的に第 17 章）で，そこでは実空間を複素化し，もとの実空間にまたもどるという二つの操作をある程度キチンと述べた．
2. 時間に対する時刻のような，一般には "ベクトル" に対する "位置" のような，アフィン的量があるが，これについては第 8 章で解説した．
3. 角というのも大きくいって一種の量であろうが，例えば内積平面の向きづけた角の全体は任意の位数の元を含むアーベル群で，それは実数のアーベル群とは本質的に異なる構造をもつ．第 17 章では角をめぐる混乱しがちないくつかの外編を整理することを試みた．
4. 空間の向きは第 14 章で定義したが，そこでは係数が実数体とい

うことが本質的である．いろいろな量について，なにが空間の内積に依存し，何が空間の向きに依存するか，ということに常に注意をはらった（第 17 章）．

5. 純代数的立場にとどまっていては考察対象の真の意味を明らかにできない部分では，こだわりなしに解析的な方法を使った．第 15 章では線型変換を ベクトル場 = 微分形式 とみてその “流れ” を調べた．また，第 17 章でも二次形式の微分などにふれないわけにいかなかった．
6. 全体として有限次元の線型空間だけを目標とした．無限次元の線型空間は位相なしで考えてもあまり意味がなく，それはむしろ関数解析として次の段階で勉強すべきものである．したがって，本書では関数空間のような例はほとんど取り上げなかった．
7. 行列式については，実際の計算との結びつきを考えて “基本変形の効果” を公理として採用した．
8. 行列は，空間の直積から直積への線型写像（そのもの）として導入した．その成分は一般には実数でなくそれ自身線型写像である（第 5 章，第 6 章）．

この本の原稿は早稲田大学理工学部数学科の 1974 年度入学生に対する（彼らが 1 年生から 2 年生にかけての期間の）講義と並行してできあがった．つきあってくれた学生諸君に感謝したい．

読者としては一応，線型代数を勉強中の教養課程の大学生で，その「意味」をつかみたい人達を想定した．一方では，小学校から大学までの数学の先生方，その他数学の教育に関心ある方々が読んで意見を出してくださるとありがたい，と思っている．

1975 年 11 月

小島　順

目次