赤摂也／広瀬健 編

現代数学への序章 3

線型代数

小島　順

昭和 51 年 5 月 10 日　第 1 刷発行

発行所　日本放送出版協会

第2章

線型空間

n-空間 $\mathbb{R}^n$ のように，2 種類の演算，和とスカラー乗法が与えられ，それが (1.5) の (L.1)〜(L.8) にあたる演算規則をみたすような集合を線型空間という．

2.1 定義

集合 X の上に二つの演算

1° $X \times X \to X; \quad (x, y) \mapsto x + y$

2° $\mathbb{R} \times X \to X; \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$

が与えられ，次の規則をみたすとき，X を**線型空間**という．

(L.1) $x + y = y + x$ （可換律）

(L.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ （結合律）

(L.3) 0 とかかれ，**ゼロ**と呼ばれる X の元が存在し，すべての $x \in X$ に対し
$x + 0 = x$

(L.4) すべての $x \in X$ に対し，$-x$ と書かれ，x の**反元**と呼ばれる X の元が存在し，
$x + (-x) = 0$

$$(\mathrm{L}.5)\quad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x \qquad \text{（分配律）}$$
$$(\mathrm{L}.6)\quad \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y \qquad \text{（分配律）}$$
$$(\mathrm{L}.7)\quad \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x \qquad \text{（結合律）}$$
$$(\mathrm{L}.8)\quad 1\,x=x$$

2.1.1　説明　(i) 1° の演算は**加法**で $x+y$ は x と y の**和**である．2° は**スカラー乗法**で[*1]，λx は x の λ **倍**である．λx は“λ と x の積”と考えた方が好都合のことが多い．

(ii) (L.3) と (L.4) を除いては，(1.5) におけると全く同様だから簡単に書いた．ゼロと反元については，(1.5) では実際に構成されるものだったが，ここでは“そういうものがある”というだけである．(iii) 線型空間の元を**ベクトル**という．ベクトルを元とする空間という意味で．線型空間といわずにベクトル空間と呼ぶことも多い．

線型を線形と書く人がいるが，漢字の感覚からいうと，形(かたち)でなく型(かた)でなければならない．

(iv) スカラーとして X に作用する $\mathbb{R}$ は X の**係数体**と呼ばれる．あるいは，X は $\mathbb{R}$ 上の線型空間（または $\mathbb{R}$-線型空間，実線型空間など）であるという．

他の体，とくに複素数体 $\mathbb{C}$ を係数体にとることも多い．第 14 章までで扱うことは（向きの議論を除いて），$\mathbb{R}$ 係数でも $\mathbb{C}$ 係数でも全く平行に同じ議論ができる．同じことだから，$\mathbb{R}$ 係数に話を限ることとし，いちいち“$\mathbb{R}$ 上の”という断り書きをつけない．後半の第 15 章以後，固有値や内積が関係するところでは，実係数と複素係数では様子が変り，平行した議論はできない．われわれは実線型空間を本来の考察の対象とし，その手段としてだけ複素空間をとりあげる．そこでは，実空間の“複素化”ともとの実空間の関係が問題となる．

結局，全体としては実係数の線型空間が中心となる．

[*1] 右からのスカラー乗法 $x\lambda$ のようなものについては (3.10.5) 参照のこと．

2.1.2　　線型空間の定義において最も重要なことは，それが**公理的**だということである．つまり，ここでは線型空間の元が実体として（モノとして）何であるかをいっさい問わず，ただその全体に一定の性質をみたす演算が定義されていることだけを要求している（その性質を述べた (L.1)〜(L.8) が線型空間の公理と呼ばれる）．**線型構造**はさまざまな考察の対象（となる場合）に，普遍的にと言えるほどひんぱんに見出される "構造" で，本質的でない個別的な属性をはぎとることでそれを明確にするのが公理的方法である．公理的方法は対象の個別的な属性を無視するという意味で抽象的であるが，正（まさ）に抽象的であること，そのことによって，広い範囲の具体的な個々の対象に直接適用されるのである（公理的という呼び方は誤解を生みやすい．こおでは推論の体系を明らかにするとか，できるだけ少ない仮定から理論をつくるとかいう論理性に主眼があるのではない．もちろん，公理は "自明な真理" などとは何の関係もない）．

線型空間の例

n-空間 $\mathbb{R}^n$ の性質を抜き出し，これを "公理" とすることで，抽象的に線型空間の概念を作ったわけである．当然，$\mathbb{R}^n$ は線型空間の第一の実例となる．他の例を考えよう．

2.2　集合 A の上の実数値関数の空間：$\mathbb{R}^A$

$\mathbb{R}^n$ の元は $\bar{n}$ 上の実数値関数であったから $\bar{n}$ を任意の集合 A におきかえれば，全く同様の演算で一つの線型空間が得られる．これを $\mathbb{R}^A$ と書く．$\mathbb{R}^A$ の元は，写像

$$x\colon A \to \mathbb{R};\quad a \mapsto x_a$$

である．これを $x = (x_a)_{a\in A}$ と書き，A をインデックス集合とする実数族という．x_a は x の a-成分である．

$$x = (x_a)_{a\in A},\quad y = (y_a)_{a\in A}$$

の和を

$$x + y = (x_a + y_a)_{a \in A}$$

で，また $x = (x_a)_{a \in A}$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ の積を

$$\lambda x = (\lambda x)_{a \in A}$$

で定義する．$x + y$ の a-成分を $(x + y)_a$，λx の a-成分を $(\lambda x)_a$ と書けば

$$(x + y)_a = x_a + y_a, \quad (\lambda x)_a = \lambda x_a$$

となっている．

$\mathbb{R}^A$ の元 x は，言葉をかえれば，A 上の実数値関数であり，x_a は a における x の値である．上の定義は，実数値関数の演算の普通の定義，つまり，

和の値は値の和，　λ倍の値は値のλ倍

に他ならない．

とくに $A = \bar{n}$ にとれば，$\mathbb{R}^{\bar{n}}$ は n-空間 $\mathbb{R}^n$ そのものである．$\mathbb{R}^A$ という表記法はこれからきている．直積の概念 (1.3) はインデックスの集合を $\bar{n}$ から一般の集合 A にかえてそのまま意味をもつが，各インデックス a ごとに $X_a = \mathbb{R}$ とおいたときの族 $(X_a)_{a \in A}$ の直積 $\prod_{a \in A} X_a$ がちょうど $\mathbb{R}^A$ と一致する（(5.1.5) 参照）．

2.2.1　実数列の空間　$A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ を自然数の集合とすれば，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の元 $x \colon i \mapsto x_i$，すなわち $x = (x_i)_{i \in \mathrm{N}}$ は実数列である．

実数の n-組と無限実数列は，インデックスが有限個か可算無限個かという違いを除けば同じで，数列の和は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ のベクトルとしての和である．逆にいえば n-組とは有限な数列のことである[*2]．

2.2.2　区間上の実数値関数の空間　A として例えば実数直線上の閉区間 $I = [0, 1]$ をとれば，$\mathbb{R}^I$ は I 上の実数値関数

$$f \colon I \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto f(t)$$

[*2] 高校の教科書では“一定の規則に従って並んだもの”と書いてあるが，デタラメでも並べてしまえば数列である．

の全体に，周知の演算をいれたものである：

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda f)(t) = \lambda(f(t))$$

われわれは A が有限集合の場合の $\mathbb{R}^A$ を中心に考えていく．その前に線型結合という概念について説明する：

2.3　線型結合

X を線型空間，A は空でない X の有限な部分集合とする．例えば A が 3 個のベクトルよりなれば $A = \{a, b, c\}$ とでも書ける．

ベクトル $x \in X$ が A の**線型結合**であるとは，各 $a \in A$ ごとに実数 ξ_a を選んで

$$x = \sum_{a \in A} \xi_a a$$

と書けることをいう（上の例では

$$x = \xi_a a + \xi_b b + \xi_c c$$

となる）．x が A に**線型従属**である，ともいう[*3]．このときの係数の族 $(\xi_a)_{a \in A}$ は $\mathbb{R}^A$ の元で A に関する x の**係数系**という[*4]．x に対し係数系が一意的に定まるとき，x は A に**一意的に従属**するという．

X のベクトルの n-組 $(a_i)_{i \in \bar{n}}$ に対してもその線型結合が全く同様に定義できる．インデックス i ごとに実数 ξ_i を選んで

$$x = \sum \xi_i a_i$$

と書けるとき，x は $(a_i)_{i \in \bar{n}}$ の線型結合である，あるいは x は $(a_i)_{i \in \bar{n}}$ に線型従属であるといい，$(\xi_i)_{i \in \bar{n}} \in \mathbb{R}^n$ を $(a_i)_{i \in \bar{n}}$ に関する x の係数系という．

[*3] 面倒になると，単に x が A に従属と書く．

[*4] 単に係数といってもよい．the coefficients のような簡単な表現が日本語では見つからない．

2.3.1　注意　A が X の有限部分集合のとき，$\#A = n$ として A の元に番号をつければ，X のベクトル n-組が得られる．これを $(a_i)_{i\in\bar{n}}$ と書けば，$A \subset X$ に対して $(a_i)_{i\in\bar{n}} \in X^{\bar{n}} = X^n$ である．どの x に対しても，x が集合 A に線型従属であることと，x が n-組 $(a_i)_{i\in\bar{n}}$ に線型従属であることは同値である．ただ，係数系が $\mathbb{R}^A$ の元から $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\bar{n}}$ の元に変わり，番号の付け方を変えると，同じ x にちがう $\mathbb{R}^n$ の元が対応する．

インデックスに何を使うかは本質的でないから，任意の有限集合に対し，L をインデックス集合とするベクトルの族 $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ が当然定義される．X の有限集合 A に対しては，A 自身をインデックス集合にとることで，"標準的" に A はベクトル族とみなすことができる．A を $(a)_{a\in A} \in X^A$，つまり $A \to X$; $a \mapsto a$ と同一視するわけである．だから，「ベクトルがベクトルの有限族に線型従属」という概念さえあれば本当はまにあうのである．

2.3.2　$X = \mathbb{R}^n$ の場合　このあたりから $x = (x^i)_{i\in\bar{n}}$ のように，ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ の i-成分は添数 i を上ツキにして x^i と書くことにする．

$i \in \bar{n}, j \in \bar{n}$ に対して

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

とおく（クロネッカーのデルタ）．

$j \in \bar{n}$ に対し，$\mathbb{R}^n$ のベクトル δ_j を

$$\delta_j = (\delta^i_j)_{i\in\bar{n}}$$

で定義する．δ_j はその i-成分 δ^i_j が $i = j$ のときのみ 1，$i \neq j$ のときは 0 ベクトルである．

ベクトルの n-組（族）$(\delta_j)_{j\in\bar{n}} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ を考えると，任意のベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$x = (x^j)_{j\in\bar{n}} \iff x = \sum_{j\in\bar{n}} x^j \delta_j$$

であるから，族 $(\delta_j)_{j\in\bar{n}}$ に x は一意的に従属する（集合 $\{\delta_j \mid j \in \bar{n}\}$ と族 $(\delta_j)_{j\in\bar{n}}$ を区別する必要はほとんどない．前者に対する係数系 $\delta \mapsto x^j$

は標準的に $j \mapsto x^j$ とみなされるからである）.

$(\delta_j)_{i\in\bar{n}}$ を $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**，あるいは**標準枠**という．それは $(\delta_j)_{j\in\bar{n}}$ が次の性質をもつことをさしている：

任意の $x \in \mathbb{R}$ は一意的に $(\delta_j)_{j\in\bar{n}}$ に従属する．

これは一般の線型空間に対する基底，枠の概念の原型である．

2.3.3　基底，枠　X を線型空間，A を X の有限部分集合とする．任意の $x \in X$ が一意的に A に従属するとき，A は X の**基底**であるという．$x = \sum_{a\in A} \xi_a a$ によって一意的に決まる $(\xi_a)_{a\in A} \in \mathbb{R}^A$ を基底 A に属する x の**座標系**（the coordinates）という[*5]．

$(a_i)_{i\in}$ を X のベクトルの n-組とする. 任意の $x \in X$ が一意的に $(a_i)_{i\in\bar{n}}$ に従属するとき，$(a_i)_{i\in\bar{n}}$ は X の**枠**であるという．$x = \sum_{i\in\bar{n}} \xi^i a_i$ によって一意的に決まる $(\xi^i)_{i\in\bar{n}} \in \mathbb{R}^n$ を枠 $(a_i)_{i\in\bar{n}}$ に関する x の座標系（または座標）という．

2.3.4　練習　$\mathbb{R}^3$ で $a_1 = (1,1,1), a_2 = (0,1,-2), a_3 = (2,0,1)$ とするとき，

1. $3a_1 - 2a_2 + a_3$ を求めよ．
2. $(3,7,-1) = \xi^1 a_1 + \xi^2 a_2$ となる (ξ^1, ξ^2) を求めよ．
3. $(0,0,1) = \xi^1 a_1 + \xi^2 a_2 + \xi^3 z_3$ となる (ξ^1, ξ^2, ξ^3) を求めよ．

2.4　$\mathbb{R}^A$ の標準基底

A を有限集合とする（あらかじめ与えられた線型空間の部分集合というのではない）．A 上の実数値関数全体の線型空間 $\mathbb{R}^A$ において，各 $a \in A$ に対してベクトル δ_a を，(2,3,2) におけると全く同様に定義する．すな

*5 単に座標ということもある．

わち，δ_a の b-成分を δ_a^b として $\delta_a = (\delta_a^b)_{b\in A}$ と書くとき，

$$\delta_a^b = \begin{cases} 1 & (a = b) \\ 0 & (a \neq b) \end{cases}$$

であるとおいて δ_a を定める．

ベクトルの族 $(\delta_a)_{a\in A}$ は次の性質をもつ：

$\mathbb{R}^A$ の任意のベクトル $x = (x^a)_{a\in A}$ は一意的に $x = \sum_{a\in A} x^a \delta_a$ と書ける．

族 $(\delta_a)_{a\in A}$ を $\mathbb{R}^A$ の標準基底という．

2.4.1　形式的線型結合　a を δ_a と同一視すれば，A は $\mathbb{R}^A$ の部分集合となる．単射 $\iota\colon a \mapsto \delta_a$ によって A と ι の像 $\operatorname{im}\iota = \iota(A)$ を重ねるわけである．このとき，$x = \sum_{a\in A} x^a \delta_a$ は $x = \sum_{a\in A} x^a a$ と書くことになり，x は A に一意的に従属する．つまり，A が族 $(\delta_a)_{a\in A}$ にかわって $\mathbb{R}^A$ の標準基底とみなされる．

以上から，$\mathbb{R}^A$ についての別の構成法が示唆される．

有限集合 A が与えられたとき，“形式的な式”$\sum_{a\in A} x^a a$ $(x^a \in \mathbb{R})$ の全体 X を考え，$\sum_{a\in A} x^a a = \sum_{a\in A} y^a a$ は $(x^a)_{a\in A} = (y^a)_{a\in A}$ のときと約束する．形式的といったわけは，これは線型空間の中での線型結合ではないから，単にこういう形の式という以外にないからである．和とスカラー倍を

$$\sum x^a a + \sum y^a a = \sum (x^a + y^a) a$$
$$\lambda\left(\sum x^a a\right) = \sum (\lambda x^a)\, a$$

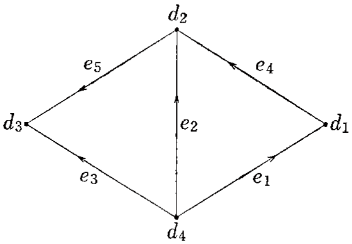
で定めると，X は線型空間となる．上の約束から，任意の $x \in X$ に一意的に $(x^a)_{a\in A} \in \mathbb{R}^A$ が対応し，この対応は演算を保存する．したがって，A の形式的線型結合の全体の線型空間 X は $\mathbb{R}^A$ と同一視できる[*6]．この対応で X の a は $\mathbb{R}^A$ の δ_a に移る．

したがって，$x = \sum_{a\in A} x^a a$ という式は形式的な式とみることもでき

[*6] 後で同型の概念を述べるが (3.3)，それによると両者は “標準的に同型” である．

るし，$\sum_{a\in A} x^a\delta_a = (x^a)_{a\in A}$ のことだと思うこともできる．

2.4.2　回路　図のような回路を考えよう（グラフともいう），これは 5 個の**辺**（**枝**ともいう）と 4 個の**接続点**（**節点**ともいう）よりなっており，辺は図のように向きづけられているものとする．回路という言葉のとり方はいろいろあるだろうが，ここでは 5 個の向きづけられた枝と 4 個の接続点，計 9 個の元からなる集合 A に，枝と点の “つながり方” という構造を合せ考えたものを回路と理解しておく．位相幾何では 1 次元の**複体**という．集合としては

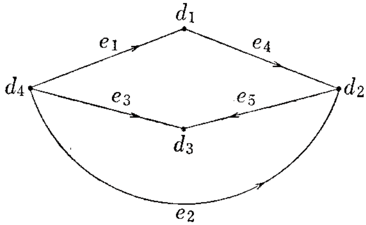


$$A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, d_1, d_2, d_3, d_4\}$$

である．“つながり方” は任意の枝 e_j と点 d_i に対して，

1. d_i は e_j の終点である．
2. d_i は e_j の始点である．
3. d_i は e_j から離れている．

のどれであるかを指定することで確定する．したがって，上の回路は次頁の図の回路と同一であるとみなす．枝の集合を $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$，点の集合を $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ とするとき，$\mathbb{R}^E$ を回路 $A = E \cup D$ の **1-チェイン**の空間，$\mathbb{R}^D$ を回路 A の 0-**チェイン**の空間と呼ぶ．



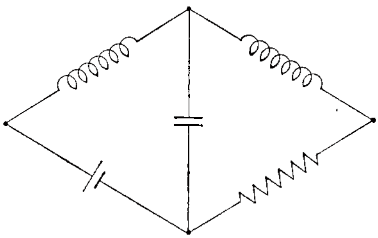
$\mathbb{R}^E$ の元，つまり 1-チェインは

$$x = (\xi^e)_{e\in E} = \sum_{e\in E} \xi^e e$$

と書かれ, 対応 $E \to \mathbb{R};\ e \mapsto \xi^e$ とも, 枝の集合 $E = \{e\}$ の形式的線型結合ともみられる. 図のように枝に番号をつけてしまうと, $x = \sum_{j\in\bar{5}} \xi^j e_j$ とあらわされるが, このときは, 枠 $(e_j)_{j\in\bar{5}}$ に関する x の座標系が $(\xi^j)_{j\in\bar{5}} \in \mathbb{R}^5$ で，$(\xi^j)_{j\in\bar{5}} \mapsto \sum_{j\in\bar{5}} \xi^j e_j$ が $\mathbb{R}^5$ と $\mathbb{R}^E$ の同型を与える.

$\mathbb{R}^E$ は回路 A 上の “流れ” の数学的モデルと考えられる.

例えば次のような電気回路を考えよう.



個々の素子の性質を無視し，そのつながり方の構造だけに着目すれば，今まで考えてきた回路 A となる．電流の単位を例えばアンペアに固定すれば，枝 e を流れる電流の強さは実数 ξ^e で表現される（e の指定された向きと電流の向きが一致すれば正の実数，反対なら負の実数と約束する)．回路全体での流れの（ある時刻における）状態は対応 $e \mapsto \xi^e$，すなわち 1-チェイン $\sum_{e\in E} \xi^e e$ であらわされる.

電流のかわりに，パイプによる水の流れを考えることも理解の助けになる．枝はパイプ，接続点には貯水池があると考える．

$\mathbb{R}^D$ の元 $y = \sum_{d \in D} \eta^d d$，あるいは番号をつけて，$\sum_{i \in \bar{4}} \eta^i d_i$ は各点 d における（枝からの）“流れこみ” とか “湧き出し” とかの強さが η^d である，という状態を表現しうる．もちろん，枝からの流れこみ[*7]に限定する場合，任意の $\mathbb{R}^D$ 元が現実の流れこみに対応するわけではない．水流でいえば，すべての点にわたる流れこみの総和はゼロという条件がある（11.10.2）（地下鉄の駅から地上に湧き出る人はどこかの駅で吸いこまれたはずである）．しｋし，“仮想の” 流れこみの全体 $\mathbb{R}^D$ を想定して，その中で現実の流れこみをさがすのが数学のごく普通のやり方である．

電気回路でいえば，現実の流れこみは各点ごとにゼロ以外であり得ない（キルヒホッフの電流法則）．$\mathbb{R}^E$ は “仮想の” 流れの全体である．現実の電流を求めること，もっと一般に，各点 d ごとに（外部への）湧き出しの強さ η^d を指定して，それを実現する流れを見つけることは，線型方程式の問題そのものであり，本書の第 12 章までは，このようなテーマを一つの柱として進めていく［線型方程式については (9.5)，(11.5)，(11.9)，この回路については (7.14)，(11.10)，さらに第 12 章全体を参照されたい］．

もちろん，この実例について今の問題を解くだけなら，別に理論というほどのものは必要なく，読者はすぐに答えが出せるだろう．真のねらいは，このように感覚的に状況がつかめる材料で，いくぶん抽象的な一般理論の理解を助けようということである．

2.4.3　実係数多項式の空間　次数 $\leq n-1$ の多項式の全体の空間を，形式的線型結合の空間の一例としてあげる．

実係数多項式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

[*7] 一つの点で，枝へ流れでる分は，その枝からの負の流れこみとみなした代数和を考えている．そのようなものを各点に対応させる．

は, 実係数または複素変数 x の関数とも考えられるが, ここでは文字（不定元）x の形式的な式とみなす．それは, x の k 乗 x^k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ の族 $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ の形式的線型結合とみることに等しい．これらの全体の線型空間 X において，族 $(x^k)_{0 \leq k \leq x-1}$ は標準的な枠とみなされる．この枠に関する $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ の座標系 $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = (a_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ によって，X と $\mathbb{R}^n$ は標準的に同型となる．ウルサクいえば，添数を一つずらした $(x^{k-1})_{1 \leq k \leq n}$ が X の枠，$(a_{k-1})_{1 \leq k \leq n}$ が座標系ということになるが，これは今の問題では自然な添数集合が $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ であり，一般論では $\bar{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ を添数集合に選んだことからくるズレで本質的ではない.

線型空間の元をベクトルと呼ぶ，という単純な定義を思い出そう．x^2 や $3x + 2$ のような多項式をベクトルと呼ぶのには変な感じがするかも知れないが，ベクトルとは個々の元の性質にかかわる呼名ではない．x^2 や $2x + 1$ だけをとり出して，これがベクトルかベクトルでないかを議論しても無意味である.

2.5　公理からでる演算規則

普通に使う演算規則が，(2.1) の公理 (L.1)〜(L.8) だけから導かれることを確かめておこう.

X を線型空間とする．まず (L.1)，(L.2)，(L.7) により，計算の順序や項の順序はいっさい気にしなくてよいことに注意する.

(i) (L.3) をみたす 0 は唯一つ.

証明． 二つのゼロを，$0, 0'$ とする．(1.3) を 0 に適用して，$0' + 0 = 0'$，(L.3) を $0'$ に適用して $0 + 0' = 0$．ゆえに $0' = 0$.

(ii) $x + y = y + x \Rightarrow y = z$

つまり，等式の両辺から同じベクトルを消してよい.

証明． (L.4) で存在が保証される $-x$ を両辺に加え，(L.3) で 0 を消す.

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ と $x \in X$ に対し

$\lambda x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ または $x = 0$.

証明. $\Leftarrow$: $\lambda = 0$ として $0x = 0$，$x = 0$ として $\lambda 0 = 0$ の二つを示す．(L.5)，(L.3) により

$0\,x + 0\,x = (0 + 0) = x = 0\,x = 0 + 0\,x$

したがって，(ii) により $0\,x$ を消して $0\,x = 0$．(L.5)，(L.3) により

$\lambda 0 + \lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 = 0 + \lambda 0$

したがって，(ii) により $\lambda 0$ を消して $\lambda\,0 = 0$.

$\Rightarrow$: $\lambda \neq 0$ ならば，(L.7)，(L.8) により

$\lambda^{-1}(\lambda x) = 1\,x = x$,

$\lambda x = 0$ を仮定しているから，$x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0$（$\Leftarrow$ の部分をもう一度使う！）.

(iv) どの x に対しても (L.4) の $-x$ は唯一つである．それは $(-1)x$ で与えられる．

証明. 一意性について：$x + x' = 0$ とすると，一方で $+(-x) = 0$ だから $x + x' = x + (-x)$．(ii) により $x' = -x$．後半は：(L.8)，(L.8)，(iiI) により

$x + (-1)x + 1\,x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0.$

(v) 任意の $(x, y) \in X \times X$ に対し，$y = z + x$ なる x は唯一つあり，それは $y + (-x)$ で与えられる．これを $y - x$ と書き，ベクトルの対 (x, y) が定める**差**（**差ベクトル**）と呼ぶ．ベクトルの計算でも符号を変えての移行が自由にできる．