赤摂也／広瀬健 編

現代数学への序章　3

線型代数

小島　順

昭和 51 年 5 月 10 日　第 1 刷発行

発行所　日本放送出版協会

組版作業者から利用者へのお願い

各章ごとに分割した PDF ファイルです。章をまたがるハイパーリンクは機能しません。

第 13 章

双線型写像

この章では，第 4 章の双線型写像についての議論のうち “1 次元” という条件をつけたものを一般の有限次元の場合に拡張する．

13.1　双線型形式

X, Y を線型空間とするとき，$\mathbb{R}$ への双線型写像 $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ をとくに**双線型形式**という．$X \times Y$ の上の双線型形式の全体の線型空間 $L_2(X, Y; \mathbb{R})$ を $X^* \otimes Y^*$ と書き，X^* と Y^* のテンソル積と呼んだ (4.5.2)．

X が n 次元で $v = (v_1, \ldots, v_n)$ を枠とし，Y が m 次元で $w = (w_1, \ldots, w_m)$ を枠とするとき，それぞれの双対枠を $(v^1, \ldots, v^n), (w^1, \ldots, w^n)$ として，$(v^i \otimes w^j)_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}}$ が $X^* \otimes Y^*$ の枠となる．したがって，$X^* \otimes Y^*$ の次元は nm である．

実際，双線型形式 f について，$f(v_i, w_j) = f_{ij}$ とするとき $f = \sum_{i,j} f_{ij} v^i \otimes w^j$ だから，$(v^i \otimes w^j)$ に対する値をとって $f_{ij} = 0$ がでるから，$(v^i \otimes w^j)$ は線型独立である．■

$X^* \otimes Y^*$ は X^* の元と Y^* の元のテンソル積の全体<u>ではなく</u>，そのようなテンソル積の和で書ける全体であることに注意しよう．

13.1.1 枠の取替 X, Y の新しい枠 $\bar{v}, \bar{w}$ を $\bar{v} = vp, \bar{w} = wq$ で定めるとき（(7.11)，(7.12) を参照），$v^i = \sum_k p^i_k \bar{v}^k, w^j = \sum_i q^j_l \bar{v}^l$ を $\sum_{i,j} f_{ij} v^i \otimes w^j$ に代入して，$\sum \bar{f}_{kl} \bar{v}^k \otimes \bar{w}^l$ と比較すれば，新しい座標は

$$(1) \qquad \bar{f}_{kl} = \sum_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}} f_{ij} p^i_k q^i_l$$

で与えられることがわかる（テンソル積の双線型により，代入の計算は自由にやれる）．この座標の動きは，X, Y 双方の枠の取替について共変的である．線型写像 $f \colon X \to Y$ を $f = \sum c^i_j w_i v^j$ とあらわしたときの座標 c^i_j が

$$(2) \qquad \bar{c}^k_l = \sum_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}} {q^k_l}^{-1} c^i_j p^j_l$$

のように，X の枠の取替について共変的，Y の枠の取替について反変的であることに対比される (7.12.2)．（共変，反変という用語については (4.4.4) を参照のこと）．

13.1.2 行列表示 枠 v, w を定めることで双線型形式 f は二重添数族 $(f_{ij})_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{m}}$ であらわされるが，普通は行列

$$M(f; v, w) = \begin{bmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \ldots & f_{nm} \end{bmatrix} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

を考え，枠 v, w に関する f の行列と呼ぶ．

$x = v\xi = \sum_i \xi^i v_i, y = w\eta = \sum_j \eta^j w_j$ に対して $f(x, y) = \sum_{i,j} \xi^i \eta^j f_{ij}$ であるが，この値は行列計算で

$$\begin{bmatrix} \xi^1 & \ldots & \xi^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & \ldots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \ldots & f_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{bmatrix} = \xi^\tau M(f; v, w) \eta$$

と書ける．$]xi^\tau \in (\mathbb{R}^n)^*$ は ξ の転置である．

なお，$v^i \otimes w^j$ は関数 $(x, y) \mapsto \xi^i \eta^j$ のことであるから，$\sum_{i,j} f_{ij} v^i \otimes w^j$ と，式としての $\sum_{i,j} f_{ij} \xi^i \eta^j$ は同じものである．

13.1.3　注意． $L(X;Y)$ の元を $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ の元で表現したように，$L_2(X,Y;\mathbb{R})$ の元は $L_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ の元で表現した方が自然である．枠 v,w に関する f の表現を

$$\tilde{f} = f(v \times w) = \sum_{i,j} f_{ij}\delta^i \otimes \varepsilon^j$$

で定義すると，図式から明らかなように，別の枠 $\bar{v},\bar{w}$ に関するの表現 f と $barf$ との間に

(3)　$\bar{f} = \tilde{f}(p \times q)$

という関係がある．これを成分ごとにみて，(13.1.1) の (1) がでるわけである．

$$\begin{tikzcd}
 & & \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \arrow[dll, "\bar{v}\times\bar{w}"'] \arrow[dl, "\bar{f}"] \arrow[dd, "p\times q"] \\
X \times Y \arrow[r, "f"] & \boldsymbol{R} & \\
 & & \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \arrow[ull, "v\times w"] \arrow[ul, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

13.2　線型空間のテンソル積

一般の有限次元線型空間も 1 次元空間と同様，その再双対空間と同一視できるから，(4.5.3) はそのまま意味をもち，テンソル積 $X \otimes Y$ が $L_2(X^*,Y^*;\mathbb{R})$ として定義される．これまでの記号をそのまま用いて，$(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in\bar{n}\times\bar{m}}$ が $X \otimes Y$ の枠となり，任意の $z \in X \otimes Y$ は一意的に $z = \sum_{i,j} \zeta^{ij} v_i \otimes w_j$ とあらわされる．$\zeta^{ij} = z(v^i, w^j)$ である

$$\iota\colon X \times Y \to X \otimes Y; \quad (x,y) \mapsto x \otimes y$$

は双線型で，テンソル積を特徴づける (4.5.4) の命題がそのまま成り立つ．

実際, $\{v_i \otimes w_j\}$ は $X \otimes Y$ の基底だから, 任意の双線型写像 $\varphi\colon X \times Y \to Z$ に対し, $\psi(v_i \otimes w_j) = \varphi(v_i, w_j)$ とおくことで線型写像 $\psi\colon X \otimes Y \to Z$

は確定する．あとは任意の $x \in X, y \in Y$ に対して $\psi(x \otimes y) = \varphi(x, y)$ をみればよいが，それは ι, φ の双線型性と ψ の線型性からあきらかである． ■

13.3　諸公式

第 4 章におけると全く同様に

(i) $L_2(X, Y; X) \cong L(X \otimes Y; Z)$
(ii) $X^* \otimes Y^* \cong (X \otimes Y)^*$
(iii) $L(X; Y) \cong Y \otimes X^*$

が成り立つ．

(ii) の左辺の元 $f = \sum_{i,j} f_{ij} v^i \otimes w^j$ はそのまま右辺の元とみなされ，$x = \sum_{k,l} \zeta^{kl} v_k \otimes w_l$ に対し

$$fz = \sum_{i,j,k,l} f_{ij} \zeta^{kl} (v^i v_k)(w^j w_l) = \sum_{i,j} f_{ij} \zeta^{ij}$$

である．$(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}}$ と $(v^i \otimes w^j)_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}}$ が互いに双対な枠となる．

(iii) において右辺 $Y \otimes X^* = L_2(Y^*, X; \mathbb{R})$ の元 $f = \sum c^i_j w_i \otimes v^j$ は

$$f \colon (w^i, v_j) \mapsto c^i_j; \quad Y^* \times X \to \mathbb{R}$$

で決まるが，f に対応する $L(X; L(Y^*; \mathbb{R})) = L(X; Y)$ の元 $\hat{f}$ は

$$\hat{f} \colon v_j \mapsto [w^i \mapsto c^i_j]; \quad X \to L(Y^*; \mathbb{R}) = Y$$

で与えられる．これは，$\hat{f} v_j \in Y$ が $w^i \hat{f} v_j = v^i_j$ で決まることを意味するから，$\hat{f} = \sum c^i_j w_i v^j$ となる (7.7)．f と $\hat{f}$ はいつでも同一視され，とくに $w_i \otimes v^j$ と $w_i v^j$（これは合成 $X \xrightarrow{v^j} \mathbb{R} \xrightarrow{w_i} Y$ であった）は同一視される．

13.3.1　　X, Y, Z を線型空間とするとき，

(iv) $L_2(X, Y; Z) \cong L(X \otimes Y; Z) \cong Z \otimes (X^* \otimes Y^*)$

である (4.6.3).

あらたに Z の枠を $u=(u_1,\dots,u_l)$ とするとき，$f\in L_2(X,Y;Z)$ は

$$f=\sum_{i,j,k} f_{ij}^k u_k\otimes(v^i\otimes w^j),\quad f_{ij}^k=u^k f(v_i,w_j)$$

と書けて，$x=\sum_i \xi^i v_i, y=\sum_j \eta^j w_j$ に対し

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i,j,k} f_{ij}^k (v^i x)(w^j y)u_k \\ &= \sum_k (\sum_{i,j} f_[ij]^k \xi^i \eta^j)u_k \end{aligned}$$

となる．

これからわかるように，$L_2(X,Y;X)$ は $(u_k\otimes v^i\otimes w^j)_{(i,j,k)\in\bar{n}\times\bar{m}\times\bar{l}}$ を枠とし次元である．座標 (f_{ij}^k) は X と Y の枠の取替に対して共変的，Z の枠の取替に対して反変的にふるまう．この座標のような三重添数族 $\in\mathbb{R}^{\bar{n}\times\bar{m}\times\bar{l}}$ は当然，行列としての表現は不可能である．これから考えても，双線型形式を行列であらわすことにこだわるのは意味がない．

13.3.2　恒等変換　$L(X;Y)=X\otimes X^*$ の元である恒等変換 1_X は $\sum_i v_i\otimes v^i$ というテンソル表現をもつが，これは $L_2(X^*,X;\mathbb{R})$ の元とみれば

$$\delta\colon (a,x)\mapsto ax;\quad X^*\times X\to\mathbb{R}$$

をあらわしている (4.6.2)．確かに，$a=\sum_i \alpha_i v^i, x=\sum_j \xi^j v_j$ として

$$\sum_i v_i\otimes v^i(a,x)=\sum_i (v_i a)(v^i x)=\sum_i \alpha_i\xi^i=ax$$

となる．

13.3.3　縮約　X が 1 次元，Y が有限次元のとき，(4.6.1) の線型写像

$$\tilde{\delta}\colon L(X;Y)\otimes X\to Y$$

標準的に同型である．

実際，X の枠 v と Y の枠 $(w_1,\dots,w_m)$ をとれば，$L(X;Y)\otimes X$ は m 次元で $((w_i\otimes v^{-1})\otimes v)_{iin\bar{m}}$ を枠にもち，$\delta\colon (w_i\otimes v^{-1})\otimes v\mapsto w_i$

である．

δ そのものは枠のとり方に無関係で標準的動径であることに注意する．

13.3.4　非退化双線型形式と双対生　Y が 1 次元のとき，総線型写像 $\varphi\colon Z \times X \to Y$ が**非退化**とは，φ^s, φ^d がともに単射であることをいう．

Z が Y に関する X の双対空間 $L(X;Y)$ で φ が積のとき, φ は非退化である((7.9) と (11.7.2)). 逆に, (X が有限次元で) 非退化な $\varphi\colon Z \times X \to Y$ が存在すれば，X と Z は Y に関して互いに双対である．言いかえると，標準的に $Z \cong L(X;Y), X \cong L(Z;Y)$ となる．

証明． φ^s, φ^d が単射だから，$\dim Z \leqq \dim L(X;Y), \dim X \leqq \dim L(Z;Y)$ が 1 次元だから $\dim L(X;Y) = \dim X, \dim(Z;Y) = \dim Z$ である．以上を組み合わせて $\dim X = \dim Z$ となり，$\dim Z = \dim L(X;Y), \dim X = \dim L(Z;Y)$ がでる．よって φ^s, φ^d は同型である．■