赤摂也／広瀬健 編
現代数学への序章 3

線型代数

小島　順

昭和 51 年 5 月 10 日　第 1 刷発行
1976 © Jun Kojima
発行所　日本放送出版協会

組版作業者から利用者へのお願い

各章ごとに分割した PDF ファイルです。章をまたがるハイパーリンクは機能しません。

第10章

次元と基底

基底の概念については，すでに (2.3.3) にその定義がある．次元についても第 7 章で定義し，これまでも次元の概念をずっと用いてきたが，次元が基底の選び方によらず線型空間そのものに対して定まるという一番カンジンな部分—次元の不変性—についてはまだ証明していない．この章では，基底について第 7 章におけるよりも立ち入った考察をおこない．次元の不変性を証明するとともに，次の章で線型写像の標準化を扱うための準備とする．

10.1　線型独立（従属）の条件

A を線型空間 X の有限部分集合とする．$x \in X$ が A（の元）の線型結合で書けることを，“x が A に従属” と呼んだのと合わせて，そうでないときに “x は A と**線型独立**” と呼ぶことにしよう．

A が空集合 $\emptyset$ のとき，$0 \in X$ は $\emptyset$ に線型従属，$x \neq 0$ は $\emptyset$ と線型独立であるとみなす.（一般に x が A に線型従属とは，$x = \sum_{a \in A} \lambda_a a = 0 + \sum_{a \in A} \lambda_a a$ と書けることであるが，$A \neq \emptyset$ のときは右辺の第二項が消え，$x = 0$ となる．したがって

$$x \text{ が } \emptyset \text{ に線型従属} \iff x = 0$$

と考えられる）.

まず，ほとんど自明の命題として

10.1.1　　X の二つの有限部分集合 A, B に対し

A が線型独立, $B \subset A \Longrightarrow B$ が線型独立,

対偶をとれば

B が線型従属, $B \subset A \Longrightarrow A$ が線型従属,

である．

いいかえると，有限部分集合は小さければ小さいほど線型独立になりやすく，大きければ大きいほど線型従属になりやすい．

空集合 $\emptyset$ は前者のもっとも極端な場合として線型独立である．

10.1.2　　$\sharp A \geqq 1$ $(A \neq \emptyset)$ のとき，A が線型独立であるためには，任意の $a \in A$ に対して a が $A \setminus \{a\}$ と線型独立であることが必要かつ十分である．

待遇に移れば

10.1.3　　$\sharp A \geqq 1$ のとき，A が線型従属であるためには，a が $A \setminus \{a\}$ に線型従属であるような $a \in A$ が存在することが必要かつ十分である．

この二つの命題において, $\sharp A = 1$ のときは $A = \{a\}$ とおいて $A \setminus \{a\} = \emptyset$ となり，それぞれ

$\{a\}$ が線型独立 $\Longleftrightarrow a \neq 0 \Longleftrightarrow a$ が $\emptyset$ と線型独立

$\{a\}$ が線型従属 $\Longleftrightarrow a - 0 \Longleftrightarrow a$ が $\emptyset$ に線型従属

を意味する．

証明． (10.1.3) の形で考える．

必要性：A が線型従属ならば $\sum_{a\in A} \lambda_a a = 0$ なる $\lambda = (\lambda_a)_{a\in A} \neq 0$ が存在する．この λ に対して，$\lambda_a \neq 0$ なる $a \in A$ が存在し，

$$0 = \lambda_a a + \sum_{b\in A\setminus\{a\}} \lambda_b b \quad \text{は} \quad a = \sum_{b\in A\setminus\{b\}} -\frac{\lambda_b}{\lambda_a} b$$

と変形できるから，この a は $A \setminus \{a\}$ に線型独立である（$A = \{a\}$ のと

きは $\sum_{b\in A\setminus\{a\}}\lambda_b b$ の硬派ないので $a=0$).
十分性：$a=\sum_{b\in A\setminus\{a\}}\mu_b b$ と書けるような $a\in A$ があれば

$$\lambda_b=\begin{cases}1 & (b=a)\\ -\mu_b & (b\neq a)\end{cases}$$

で $\lambda=(\lambda_b{}')_{b\in A}$ を定めるとき，$\lambda\neq 0$ かつ $\sum_{b\in A}\lambda_b b=0$ である（$A=\{a\}$ のときは $a=0$ という家庭から $1_a=0$ がでる）．したがって A は線型従属となる． ■

10.1.4　A が線型独立とする．ベクトル $x\in X$ が A と線型独立であるためには，$x\notin A$ かつ $A\cup\{x\}$ が線型独立であることが必要かつ十分である．

この命題の対偶に移れば

10.1.5　A が線型独立とする．$x\in X$ が A に線型従属であるためには，$x\in A$ あるいは $A\cup\{x\}$ が線型従属であることが必要かつ十分である．

証明. (10.1.5) の形で考える．
必要性：x が A に線型従属で $x\notin A$ とすれば，$x=\sum_{a\in A}\lambda_a a$ と書ける．$x-\sum_{a\in A}\lambda_a a=0$ と移項すればわかるように，

$$\mu_a=\begin{cases}1 & (a=x)\\ -\lambda_a & (a\in A)\end{cases}$$

s で $\mu=(\mu_a)_{a\in A\cup\{a\}}$ を定義すれば，$\mu\neq 0$ かつ $\sum_{a\in A\cup\{a\}}\mu_a a=0$ だから，$A\cup\{x\}$ は線型従属である．
十分性：$x\in A$ のときは x は明らかに A に線型従属だから，$x\notin A$ とする．その上で $A\cup\{x\}$ が線型従属と仮定する．すると

$$\lambda_x x+\sum_{a\in A}\lambda_a a=0\quad かつ\quad \lambda=(\lambda_a)_{a\in A\cup\{x\}}\neq 0$$

なる微係数 λ が存在する．$\lambda_x\neq 0$ である．なぜなら，もし $\lambda_x=0$ な

らば

$$\sum_{a\in A}\lambda_a a = 0 \quad \text{かつ} \quad (\lambda_a)_{a\in A}\neq 0$$

となり，A が線型独立という仮定に反するからである．λ_x で両辺を割ると

$$x = \sum_{a\in A}\left(-\frac{\lambda - a}{\lambda_x}\right)a$$

となり，x は A に線型従属である． ■

10.1.6　注意． A が線型独立で, x が A に線型従属であっても, $A\cup\{x\}$ が線型従属とは限らない．$x\in A$ のときは，x は A に線型従属だが, $A\cup\{x\}=A$ は線型独立だからである．

(10.1.4) に対応する，ベクトルの組に対する命題は

10.1.7　　$(v_a,\dots,v_n)\in X^n$ が線型独立のとき,

$$x \text{ が } (v_1,\dots,v_n)\text{に線型従属} \iff ()v_1,\dots,v_n,x\,text\text{が線型従属}$$

という形になる．このように，線型独立，線型従属の概念は、有限集合に対しても有限族に対しても形式的には全く同様に定義されるが、その内容には多少の差がある（(7.2.5) 参照)．次元に関連する議論では，集合に対する概念で一貫する方がわかりやすい，と私は思う。

10.2　極大独立集合，極小生成集合

線型空間 X の線型独立な有限部分集合 A が**極大独立集合**であるとは, すべての $x\in X\setminus A$ に対して $A\cup\{x\}$ が従属[*1]であることをいう．

X を生成する有限部分集合 A が**極小生成集合**であるとは，すべての $x\in A$ に対して $A\setminus\{x\}$ は X を生成しないことをいう．

$X=\{0\}$ のとき，$A=\emptyset$ は X は生成するが，これは極小生成集合である（空集合に対しては，上の条件は自動的にみたされるとみなす)．

[*1] 以下 “線型” を省略して独立，従属とだけ書くことが多い．

$A = \{0\}$ も $X = \{0\}$ を生成するが、これは極小ではない．$\emptyset = A \setminus \{0\}$ が X を生成するからである．

A が極大独立集合とは，A にこれ以上の元を加えると線型独伊立性が保てないこと，A が極小生成集合とは，A からこれ以上の元を減らすと X を生成しなくなること，を意味する．

10.2.1　線型空間 X の有限部分集合 A について，次の三つの条件は同値である．

(i) A は X の基底である．
(ii) A は X の極大独立集合である．
(iii) A は X の極小生成集合である．

証明．
(i)$\Longleftarrow$(ii) A が基底である（したがって独立である）と仮定して A が極大であることを示す．A は生成集合でもあるから，$x \in X$ はすべて A に従属，したがって，(10.1.5) により $x \notin A$ ならば $A \cup \{x\}$ は従属である．
(ii)$\Longleftarrow$(i) A が極大独立であると仮定して，A が生成集合であることを示す。$x \in X \setminus A$ のとき，A は極大だから，$A \cup \{x\}$ が従属，したがって，再び (10.1.5) により，すべての $x \in X$ は A に従属する．
(i)$\Longleftarrow$(iii) A が基底である（したがって生成集合である）と仮定し，A が極小であることを示す．もし A が極小でないとすれば，

$(\exists x \in A)$　（$A \setminus \{x\}$ が生成集合）

となる．したがって，x は $A \setminus \{x\}$ に従属となり，(10.1.3) により A は線型従属である．これは A が基底（したがって独立）であることと矛盾する．
(iii)$\Longleftarrow$(i) A を極小生成集合と仮定して，A が独立であることを示す．もし A が従属ならば，(10.1.3) により，x が $A \setminus \{x\}$ に従属であるような $x \in A$ がある．すると，A に従属する元はすべて $A \setminus \{x\}$ に従属することとなり，$A \setminus \{x\}$ は X の生成集合となる．これは A が極小である

ことに矛盾する. ■

(iii)$\Longleftarrow$(i) の最後のところで使ったのは次の命題である.

10.2.2 A と B を X の有限部分集合とする. A が B に線型従属（すなわち A の元がすべて B に線型従属）ならば, A に線型従属する X の元は B にも線型従属する. したがって, A が B に線型従属で A が X を生成すれば B も X を生成する.

これは単なる "代入" の問題にすぎない。上の証明では $B = A \setminus \{x\}$ として用いる.

10.3 次元の不変性

線型代数の基本定理というべきものの一つが次の (10.3.1) である. これまではどちらかといえば線型代数の言葉について述べてきたようなもので, 証明が自明でない, という意味での定理らしい定理はあまり（一つも？）なかった.

(7.4) 以来, われわれは何も断らなければ線型空間 X は有限次元, つまり有限な生成集合をもつものと仮定してきたことを思い出そう.

10.3.1 線型空間 X において, 有限部分集合 A は線型独立, 有限部分集合 B は X を生成するものとする. このとき $\sharp A \leqq \sharp B$ である.

証明は後まわしにして (10.7), この命題の意味を考えよう. X が n 個のベクトル（の集合）$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ で生成されているとき, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m$ が X が線型独立ならば $m \leqq n$, というのが (10.7.1) の主張するところだから, $m > n$ ならば, A は必ず線型従属である. いいかえると, n 個の元（よりなる集合）から生成される線型空間において, 線型独立の部分集合の元の個数は高々 n である.

A, B がともに X の基底ならば, A が独立, B が生成として $\sharp A \leqq \sharp B$, 両者の立場を逆にして $\sharp B \leqq \sharp A$ だから, $\sharp A = \sharp B$ である. すなわち：

10.3.2　　X の基底に属するベクトルの個数はどの基底をとっても同じである．

この個数を X の**次元**と名付け，$\dim X$ と書いたのであった．

10.3.3　　$X = \{0\}$ の次元は 0 で，空集合 $\emptyset$ がその基底である．

10.4　基底の構成

有限次元の線型空間には必ず基底が存在することをしめそう．この基底の存在と, 前項の基底の濃度の一意性とをあわせることによって, すべての有限次元線型空間に対して次元が定義されることになる．

10.4.1　　X が有限次元で $\{0\}$ でないとする．このとき任意の有限な生成集合 B に対し，B の部分集合で X の基底となるものがある．

証明．

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ とする．m 個のベクトル $b_1, b_2, \ldots, b_m$ は互いに異なるものとしてよい．B の部分集合の系列 $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_m$ を次のように作ろう．$b_1 = 0$，すなわち b_1 が空集合 $\emptyset$ に従属ならば，$A_1 = \emptyset$ とおき，$b_1 \neq 0$，すなわち b_1 が $\emptyset$ と独立ならば，$A_1 = \emptyset \cup \{b_1\} = \{b_1\}$ とおく．A_1 はどちらの場合も独立である．次に b_2 が A_1 に従属ならば $A_2 = A_1$ とおき，b_2 が A_1 と独立ならば $A_2 = A_1 \cup \{b_2\}$ とおく（例えば $A_1 = \emptyset$ ならば $b_1 = 0$ だから $b_2 \neq 0$ であり，b_2 は A_1 と独立で，$A_2 = \{b_2\}$ となる）．(10.1.4) により，A_2 は独立となる．この操作を続けて空集合 $\emptyset$ を A_m にまで拡張すると，A_m は線型独立である．一方，$B \setminus A_m$ の元はすべて A_m に従属だから［実際，b_i $(i \leqq i \leqq m)$ が A_m に属さないときは，既に A_i にも属さず，構成の仕方より，b_i は A_{i-1} に従属する（$A_0 = \emptyset$ とおく）．したがって，なおのこと A_m に従属する］，B 全体が A_m に従属，したがって A_m は X を生成する (10.2.2)．ゆえに A_m は X の基底である．■

少し拡張された命題として：

10.4.2　10.4.2　X が有限次元，A は X の独立集合，B は有限な X の生成集合とする．このとき A に B のいくつかの元を付け加えることで X の基底が得られる．

証明.

$B=\{b_1,\ldots,b_m\}$ とする．前の (10.4.1) では，$A_0=\emptyset$ を A_m に拡張したが，ここでは $A_0=A$ から出発すればよい．あとは全く同様である．
■

このように X の任意の独立集合は基底にまで拡張できることがわかった．しかも拡張にさいして付け加えるベクトルは，勝手に与えられた有限生成集合から選んでくることにができる．

とくに，$A\subset B$ の場合を考えると：

10.4.3　　A が独立集合，B が有限な生成集合で，$A\subset B$ ならば，$A\subset C\subset B$ なる X の基底 C が存在する．

次元についての別の形の特徴づけがある．

10.5

X が n 次元であるためには，$\sharp A=n$ なる独立集合 A が存在し，$\sharp A>n$ なる A はつねに従属であることが必要かつ十分である．

証明.

必要性：X が n 次元なら，その基底 B は X を生成し，$\sharp B=n$ であるから，(10.3.1) により任意の独立集合 A に対して $\sharp A\leqq n$．$\sharp A=n$ なる A としては B 自身をとればよい．

十分性：$\sharp A=n$ なる独立集合 A をとれば，条件より A は極大独立集合となり，(10.2.1) により A は基底である．■

今条件が次元の定義として採用される本もある．条件にあらわれる $\sharp A = n$ なる独立集合 A が基底となる．

有限集合 A が基底であるための条件を (10.2.1) で与えたが，次元の概念に関連するものをさらに付け加える．

10.6

有限次元線型空間 X の有限部分集合 A について，次の三つの条件は同値である．

a) A は X の基底．
b) $\sharp A = \dim X$，かつ A は線型独立．
c) $\sharp A = \dim X$，かつ A は X を生成．

証明． a)$\Longrightarrow$b)，a)$\Longrightarrow$c) は明らかである。
b)$\Longleftarrow$a)：A について b) を仮定し，$x \in X \setminus A$ とする．(10.5) により $A \cup \{x\}$ は従属であるから，A は極大独立集合，したがって (10.2.1) により A は規定．
c)$\Longleftarrow$a)：A について c) を仮定し, $x \in A$ に対する $A \setminus \{x\}$ を考える．もし $A \setminus \{x\}$ が X が生成すれば，(10.3.1) により $\dim X \leqq \sharp(A \setminus \{x\}) < \sharp A$ となり矛盾．したがって，A は極小生成集合である．(10.2.1) により A は基底．■

10.7　(10.3.1) の証明

B が生成集合，A が独立集合で $\sharp A \geqq \sharp B$ ならば $\sharp A = \sharp B$ であることを示せばよい．方針は B の元を一つ一つ A の元で差し替えていき，しかも各段階で X を生成するという性質を失わぬようにするのである．こうして B の元をすべて A の元でおきかえてしまえば，得られた集合—この証明の中では B_n—は A の部分集合で $\sharp B_n = \sharp B$ であり，かつ X を生成する．もし B_n が A の真部分集合ならば，$x \in A \setminus B_n$ は B_n

に従属，したがって $B_n \cup \{x\}$ は従属となるが (10.1.5)，これは不可能である (10.1.1)．したがって，$B_n = A$ でなければならない．このとき $\sharp A = \sharp B_n = \sharp B$ である．

以上の方針に従って実際の構成を述べる．

P_k は次のような命題とする：$A \cup B$ の部分集合 B_k で，X を生成し

(i) $\sharp B_k = \sharp B$，(ii) $\sharp(B_k \cap A) \geqq k$

をみたすものが存在する．((ii) の条件は A の元が少なくとも k 個は B_k に含まれることをいっている)．

$\sharp B = n$ として，$0 \leqq k \leqq n$ に対して P_k が正しいことを示す．

P_0 は自明である：$B = B_0$ とおけばよい．したがって，$0 \leqq k < n$ に対して $P_k \Longrightarrow P_{k+1}$ を示せばよい．

そこで P_k を仮定し，$a_1, \ldots, a_k$ を $B_k \cap A$ の相異なる元とする（これがすべてとは限らない)．a_{k+1} を A の別の元とする．$a_{k+1} \in B_k$ ならば $B_{k+1} = B_k$ とおく．$a_{k+1} \notin B_k$ ならば ${B'}_{k+a} = B_k \cup \{a_{k+1}\}$ とおく．B_k は X を生成するから，B'_{k+1} も X を生成する．当然にも ${B'}_{k+1}$ は極小生成集合ではないから，(10.2.1) により独立ではない．${B'}_{k+1}$ の元を一列に並べ，その際 A に属する元を初めの方におく．すると，自分より前におかれた元の集合に従属な元—それを b_{k+1} と書く—が存在する［なぜなら，そうでないと帰納的に，初めから途中までの元の集合はすべて独立となり (10.1.4)，結局 ${B'}_{k+1}$ が独立となるからである］．A の部分集合はすべて独立だから，$b_{k+1} \in A$ でなければならない．そこで $B_{k+1} = {B'}_{k+1} \setminus \{b_{k+1}\}$ とおく．B_{k+1} もまた X を生成し (10.2.2)，

(i) $\sharp B_{k+1} = \sharp B = n$，(ii) $\sharp(B_{k+1} \cap A) \geqq k+1$

をみたす．よって P_{k+1} が正しい．

こうして，P_n が成り立つ．いいかえれば，$B_n \subset B \cup A$ で，X を生成し，$\sharp B_n = n, \sharp(B_n \cap A) \geqq n$ となるものがある．最後の式は $B_n \supset A$ を意味する．あとはこの証明の最初に述べたように，$A = B_n$ となり，$\sharp A = \sharp B$ がでる． ■

10.7.1　注意． B が線型空間 X の有限生成集合，A が独立集合で，$\sharp A = \sharp B$ ならば，A と B はともに X の基底である．

実際，$\sharp A = \sharp B$ ならば，上の証明が直接適用できて A は生成集合にもなる．したがって，A は X の基底である（(10.3.1) つまり証明の結果をつかって A が極大独立集合であることを導き，(10.2.1) に帰着させてもよいが）．このとき，$\dim X = \sharp B$ となるから，(10.6) により B も X の基底である．

10.8　有限次元空間の部分空間

X が有限次元で，W が X の部分線型空間ならば，W も有限次元である．

この命題は (7.4) で保留しておいたものである．

証明． W の有界な独立集合 A の全体の集合 $\mathscr{A}$ を考える X を n 次元とすれば $A \in \mathscr{A}$ に対し $\sharp A \leqq n$ だから (10.3.1)，集合 $\{\sharp A \mid A \in \mathscr{A}\}$ の最大値 $m \leqq n$ がある．$\sharp B = m$ なる B は W の基底である．なぜなら，このとき B は極大独立集合であるから (10.2.1). ■

このとき，W の基底は X の基底に拡張できる (10.4.2)．したがって

10.8.1　　W が X の部分空間ならば $\dim W \leqq \dim X$ である．

さらに

10.8.2　　W が X の部分空間で $\dim W = \dim X$ ならば W は X と一致する．

実際，このとき W の基底を A とすれば，A は (10.6) の条件 b) をみたし，X の基底ともなるからである．

これと対称的に

10.8.3　　W が X の部分空間で $\dim W = 0$ ならば $W = \{0\}$ である．

10.9　有限次元線型空間の分類

二つの有限次元線型空間 X, Y に対して,

$$X \text{ と } Y \text{ は同型} \iff \dim X = \dim Y$$

である.

実際，線型双射 $f\colon X \to Y$ が存在するとき，X の基底 A に対して $B = \{f(a) \mid a \in A\}$ は Y の基底となり，しかも $\sharp B = \sharp A$ だから，X と Y は同一次元である．逆に，X と Y の基底 A, B で $\sharp A = \sharp B$ なるものがあれば，<u>任意の</u>双射 $f\colon A \to B$ に対して、それを X から Y への線型写像に拡張したもの (7.5.2) が X と Y の同型を与える． ■

同型であるかどうかを基準に有限次元線型空間を分類するとき，次元という自然数だけで類が定まる．いいかえると，次元は同型による分類の完全な指標となる．