赤摂也／広瀬健 編

現代数学への序章 **3**

線型代数

小島　順

昭和 51 年 5 月 10 日　第 1 刷発行

発行所　日本放送出版協会

組版作業者から利用者へのお願い

各章ごとに分割した PDF ファイルです。章をまたがるハイパーリンクは機能しません。

第1章

n-空間 $\mathbb{R}^n$

線型空間の公理的な扱い（第2章）の前に，その一例である n-空間 $\mathbb{R}^n$ から話をはじめよう．有限次元の線型空間は（その次元を n として）すべて $\mathbb{R}^n$ と同型であり，$\mathbb{R}^n$ は単なる線型空間の一例という以上の役割をもつ．

1.1　実数の n-組

n 個の実数の順序づけられた組

(*)　　$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

を実数の n-組（n-tuple）と呼ぶ．さしあたり実数の n-組だけを扱うので，単に "n-組" ということもある．例えば $(-1, 0, 3, 2)$ は一つの 4-組であり，$(\frac{1}{2}, -5, -\frac{2}{3}, 0, 8)$ は一つの 5-組である．

$n = 2$ のときは，2-組は対（つい）と呼ぶのが普通である．ていねいにいえば，(x_1, x_2) は実数の順序づけられた対ということになる．

われわれは，n-組を "一つのモノ" としてとらえるのだから，これに一つの文字を与え $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ というふうに書く．

実数の n-組 x は，実数を配列した $(*)$ ような形（かたち）であらわされるが，その本質は，1 から n までのインデックス i ごとに実数 x_i が指定されているということにある．したがって，n-組 x は写像 $i \mapsto x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

と考えるのが自然である．こうして次のような定義に達する．

1.1.1　定義　実数体を $\mathbb{R}$ と書き[*1]，1 からはじまる n 個の自然数の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を $\bar{n}$ と書く．このとき，写像

$$x \colon \bar{n} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad i \mapsto x_i$$

を実数の n-組と呼ぶ．

つまり，実数の n-組とは $\bar{n}$ 上の実数値関数のことである．i に対する x の値 $x(i)$ を，i を添数（suffix）とする x_i であらわすわけである．この n-組を $x = (x_i)_{i \in \bar{n}}$ と書く．また，実数 x_i を x の i-**成分**という．

1.1.2　その説明　n 個の定まった項目について，数字（実数）を書きこむ欄のあるカード（何かの伝票のようなもの）を考えよう．各欄にはそれがどの項目にあたるかを示す記号（インデックスという）がついている．インデックスに何を使うかは本質的ではないから，一応 1 から n までの自然数を用いることにする．インデックス i の欄に書きこむ数字を x_i とすれば，一枚のカードの各欄に数字を書き入れる操作は，$\bar{n}$ の各元 i に実数 x_i を対応させることだから，$\bar{n}$ 上の一つの実数値関数を定める．これが n-組 $x \colon i \mapsto x$ である．

各欄がどのように配列されているかは問題でなく，インデックス i に対する値 x_i が定まることで n-組が定まる．左から右への配列 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は n-組の一つのあらわし方に過ぎない．しかし，ひとたび配列の仕方をこのように約束すれば，添数をつけなくても例えば (a, b, c) は $1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c$ なる 3-組のことであるとわかる．後になると $x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$ のよう

[*1] 実数全体の集合に和と積という演算が定める代数的構造を合せ考えたもの実数体という（1.6）

に上から下への配列も使う[*2]（添数を上ツキに移す）.

1.1.3　例　米屋が右の上のような配達伝票（あるいは納品書）に

米	角砂糖	酒	食用油
袋	個	ビン	カン

右の下のように数字を書きこむとき，彼は実数の 4-組 $(3, 2, 0, 2)$ を定めたことになる.

米	角砂糖	酒	食用油
3 袋	2 個	0 ビン	2 カン

1.2　n-空間 $\mathbb{R}^n$

次に，個々の実数の n-個でなく，一つの n を固定した上で，すべての n-組よりなる集合を考えよう．この集合を **n-空間**（くわしくは**実 n-空間**）と呼び，$\mathbb{R}^n$ と書く.

$\mathbb{R}^n$ という記法を説明するために，まず集合の**直積**という概念について述べる．直積は本書全体を通じて最も基本的な概念の一つである.

1.3　直積

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ をそれぞれ集合とする（正確にいうと，$\bar{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$ をインデックスの集合とする**集合の族** $(X_i)_{i\in\bar{n}}$ を考えているわけである.）インデックス i ごとに集合 X_i の一つの元 x_i を指定すると，対応 $i \mapsto x_i$ $(i \in \bar{n})$ が得られる．これを

$$x = (x_i)_{i\in\bar{n}} \quad \text{あるいは} \quad = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と書き，その全体の集合を $(X_i)_{i\in\bar{n}}$ の直積という．$\prod_{i\in\bar{n}} X_i$ または $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ と書く.

[*2] (4.5) 参照.

直積の元 $x = (x_i)_{i\in\bar{n}}$ は，i ごとにその値 x_i が属する集合が異なる（可能性がある）から，普通の意味の写像—それは定まった始域（source）と終域（target）をもつ—とみたければ，合併集合

$$X = \bigcup_{i\in\bar{n}} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$$

を作り，

$$x\colon \bar{n} \longrightarrow X; \qquad i \mapsto x_i \in X_i$$

と考えればよい．写像 $x\colon \bar{n} \mapsto X$ の中で，$x_i \in X_i$ $(i \in \bar{n})$ という条件を満たすもの全体の集合が $\prod_{i\in\bar{n}} X_i$ である．しかし，一つの集合の部分集合の族でない集合の合併というものは（直積自身よりも）考えにくい面があるから，無理にこのように考える必要はない．

1.3.1　この定義を $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$ の場合に適用すれば，n 個の $\mathbb{R}$（のコピー）の直積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ は (1.2) で定義した n-空間 $\mathbb{R}^n$ と一致する．

一般に，$X_1 = \cdots = X_n = X$ の場合の直積 $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{個}}$ を X^n（X の n 乗）と書く．

n-空間 $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ の n 乗ということになる．

1.3.2　実数の n-組を n-空間 $\mathbb{R}^n$ の元とみるとき，これを $\mathbb{R}$ の**点**と呼ぶ．とくに，角成分が 0 の点を 0 と書き，$\mathbb{R}^n$ の**原点**と呼ぶ．$\mathbb{R}^n$ の点はまた**ベクトル**とも呼ばれる[*3]．しかし，ベクトルと呼ぶときは，$\mathbb{R}^n$ の一定の代数的構造を背後に考えているのである．

[*3] n 項ベクトル，n 次元数ベクトルなどと呼ぶ．しかし，“n 次元” とは空間 $\mathbb{R}^n$ の性質で，個々の元の性質ではないことに注意しよう．実際には，“$\mathbb{R}^n$ のベクトル” と呼ぶことが最も多い．

1.4　ベクトルの演算

$\mathbb{R}^n$ のベクトルは $\bar{n}$ 上の実数値関数だから，実数値関数一般に通用する演算が定義できる．

1.4.1　加法　R^n の二つのベクトル $x = (x_i)_{i\in\bar{n}}$ と $y = (y_i)_{i\in\bar{n}}$ に対し，その**和** $x + y$ を $(x + y)_i = x_i + y_i$ $(i \in \bar{n})$ で定義する．ここで，$(x + y)_i$ は $x + y$ の i-成分のつもりで，$i \in \bar{n}$ に対する $x + y$ の値は x の i に対する値と y の i に対する値の和である，として $x + y$ を定義したのである．

$$x + y = (x_i + y_i)_{i\in\bar{n}} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

となる．和を作る演算を**加法**という．

1.4.2　スカラー乗法　R^n のベクトル $x = (x_i)_{i\in\bar{n}}$ と実数 λ に対して，その積 λx は $\mathbb{R}^n$ のベクトルで，$(\lambda x)_i = \lambda x_i$ $(i \in \bar{n})$ で定義される．いいかえると，λx はその i-成分が λx_i に等しいベクトルである．

$$\lambda x = (\lambda x_i)_{i\in\bar{n}} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

となる．

$\mathbb{R}^n$ の元をベクトルと呼ぶのに対して，$\mathbb{R}$ の元は今の場合**スカラー**と呼ばれる．λx は “x の λ 倍” ということが多く，この演算 $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ は**スカラー乗法**とかスカラー積の演算とか呼ばれている．

1.4.3　例　$n = 4$ とし $x = (1.5, 2, 3, 2), y = (3.5, 0, -4, 0.6)$ とすれば，その和 $x + y = (5, 2, -1, 2.6)$ である．また，$\lambda = 3$ とすれば，x の 3 倍は $3x = (4.5, 6, 9, 6)$ である．1.1.3 の例では

$$\begin{array}{r l}
x = & (1.5\text{袋}, 2\text{箱}, 3\text{ビン}, 2\text{カン}) \\
y = & (3.5\text{袋}, 0\text{箱}, -4\text{ビン}, 0.6\text{カン}) \\
\hline
x + y = & (5\text{袋}, 2\text{箱}, -1\text{ビン}, 2.6\text{カン}) \\
3x = & (4.5\text{袋}, 6\text{箱}, 9\text{ビン}, 6\text{カン})
\end{array}$$

と書けば，二つの演算の意味がはっきりする．

同じインデックスに対する成分は，例えば米という同じモノの量をあらわしているから，

$$1.5袋 + 3.5袋 = 5袋, \qquad 3 \times 1.5袋 = 4.5袋$$

のように和とスカラー倍を作ることに意味がある．ここでは，袋，箱などの単位を仮に添えて書いたが，そのほんとうの意味は第 4 章でわかる（この項は (5.4.5) に続く）．

1.5　演算規則

$\mathbb{R}^n$ の二種類の演算，加法およびスカラー乗法を定義したが，この演算がみたす規則を列挙する．

(L.1) すべての $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$x + y = y + x \qquad （可換律）$$

(L.2) すべての $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad （結合律）$$

(L.3) すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$x + 0 = x \qquad （ゼロの存在）$$

(L.4) すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$x + (-x) = 0$$

ただし $x = (x_i)_{i \in \bar{n}}$ に対し，$-x = (-x_i)_{i \in \bar{n}}$

(L.5) すべての $x \in \mathbb{R}^n$ と，すべての $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \qquad （分配律）$$

(L.6) すべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ とすべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，

$$x + y = y + x \qquad （分配律）$$

(L.7) すべての $x \in \mathbb{R}^n$ とすべての $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lambda(\mu x) = (\lambda \nu)x \qquad （結合律）$$

(L.8) すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$1\, x = x$$

以上について解説を加える．(L.1)，(L.2)，... という番号は，あとでこれを線型空間の公理として採用するので，線型（linear）の頭文字をつけたものである．(L.4) までは加法だけに関係しており，あとの 4 個はスカラー乗法も合せ考えたときの規則である．

(L.2) の両辺の（同一の）ベクトルを $x+y+z$ と書く．これは任意の有限個のベクトルの和 $x_1+x-2+\cdots+x_n$ に拡張される．(L.7) の共通のベクトルも $\lambda\nu x$ と書くことがある．

(L.3) の 0 とは，原点 $0=(0,\ldots,0)$ のことであるが，ベクトルの演算を考えるときには**ゼロベクトル**という．

(L.4) の $-x$ は x の -1 倍 $(-1)x$ に等しい．x **の反ベクトル**とでも呼ぶべきものである（実際 $x\neq 0$ に対する x^{-1} を x の逆数と呼ぶのに，実数 x に対する $-x$ には定着した呼び方がない．しかし x の反数ということもあり，反ベクトルはそれに合せたものである）．

(L.1)〜(L.8) を証明するには，成分にもとづく演算の定義にもどり，$\mathbb{R}$ での対応する演算規則に帰着させればよい．ほとんど自明だが，このような議論に慣れてない読者は一応自分で確かめておいた方がよい．

1.6　実数体 $\mathbb{R}$

ここで実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の上の代数構造について整理しておく．

$\mathbb{R}$ の上には，加法（話をつくる演算），乗法（席をつくる演算）の二つの演算，すなわち

1. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $(x,y)\mapsto x+y$
2. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $(x,y)\mapsto xy$

が与えられており，これらは次の規則に従う．

(R.1)	$x+y=y+x$	（可換律）
(R.2)	$(x+y)+z=x+(y+x)$	（結合律）
(R.3)	すべての x に対し $x+0=x$	（ゼロの存在）
(R.4)	$x+(-x)=0$	（反数の存在）
(R.5)	$xy=yx$	（可換律）
(R.6)	$(xy)z=x(yz)$	（結合律）
(R.7)	すべての x に対し $1x=x$	（1 の存在）
(R.8)	$x \neq -0$ に対し xx^{-1}	（逆数の存在）
(R.9)	$x(y+z)=xy+xz$	（分配律）

われわれは，習慣に従って普通に計算してよいのだあ，それはこのような規則に従ってしるのである（今後は一つ一つ確かめながら計算しよう，とここで提案しているのではない）．

代数学の言葉では，(R2)，(R3)，(R4) によって $\mathbb{R}$ は加法に関して群であり，(R1) を加えて $\mathbb{R}$ は**アーベル群**になる．また，乗法に関する (R5)，(R6)，(R7) と，分配律 (R9) を加えて，$\mathbb{R}$ は可換な環となる（可換とは積が可能なこと）．一方，(R5)，(R6)，(R7)，(R8) は $\mathbb{R}$ における $\{0\}$ の補集合 $\mathbb{R}-\{0\}$ が乗法に関して可換群（この場合はアーベル群とはいわない）であることをいっている．このような代数的構造を可換体という[*4]．集合 $\mathbb{R}$ は可換体としての構造をもち，この構造を合わせ考えた $\mathbb{R}$ を実数体と呼ぶのである．

$\mathbb{R}$ にはさらに順序の構造があり，一つの順序体となるのであるが，ここでそれを述べることはやめて，知っている実数の性質は“普通に”使っていくことにしよう．順序対としての $\mathbb{R}$ が直観的な意味での直線として幾何学的に表現されるのである（0 と 1 の位置を直線上で決めれば，$\mathbb{R}$ と直線の対応がつく（第 8 章参照））．直線が“すきまなくつながっている”ことに対応する $\mathbb{R}$ の性質が，例えば“上に有界な部分集合に対する

[*4] 単に体といえば可換体をさすことも多い．非可換の場合に非可換体とことわることになる．

上限の存在” の公理であらわされる[*5]．このような “位相的構造” も合わせ考えた $\mathbb{R}$ の上に解析学が展開されるわけである［本書では線型微分方程式など解析学にかかわることをかなり扱うが（第 15 章），その “解析的な基礎” についてはほとんど無視する．順序対としての構造をほんとうに使うのは空間の向きの定義（第 14 章）以後である］．

1.6.1　線型代数と幾何　実数体と直観的な直線との対応は，数学的概念の（直観的な）幾何学的モデルを考える基礎となるものである．“平面上の二本の直線” をもとに，線型代数のいくつかの大事な概念や定理が図示できる（第 7 章，第 11 章）．

幾何学的な対象としての直線や平面については，それが一体何であるかは問題とせず，数学の論理的な構成というスジとは無関係な，“外にあるもの” として扱う．しかし，これら幾何学的な対象は，われわれにとって “よく知られたもの” であるから，数学的概念の表象として大変役に立つ．それに合せて，数学を述べる基本的な “言葉” として幾何学的用語が（本来の直接的な意味から一応離れて）ふんだんに用いられる．

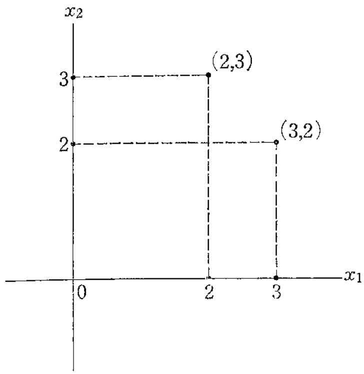
一方，逆に，本来の幾何学的問題は，線型代数の中に適切なモデルを考えることで研究できる．しかし，より重要なことは．物理，工学．経済学，その他日常生活にいたるまでの様々な問題に対して線型代数がその数学的モデルを（ある場合は局所的近似として）提供するということである．

1.6.2　注意　実数の n-組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と n 個の実数よりなる集合 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ は全く違う概念である．前者は$\mathbb{R}^n$ の点であるのに対して，後者は$\mathbb{R}$ の部分集合である．

1. まず，n-組では順序が問題になる．例えば，対 $(3, 2)$ と対 $(2, 3)$ は異なる対である．これに対して集合 $\{3, 2\}$ と $\{2, 3\}$ は同一であ

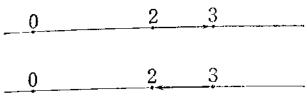
[*5] 結局，実数体 $\mathbb{R}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ を部分順序対として含む順序系で，“上限の公理” を満たすものとして特徴づけられる．

る．座標平面を対を図示すれば



のように，$(3,2)$ と $(2,3)$ は別の点である．

対（$n=2$）の場合の特殊性だが，左図のように，$(2,3)$ を直線上の点 2 から点 3 に向かう矢線としてあらわすこともできる．



対 $(3,2)$ は反対向きの矢線となる（“二つの点の対” の一般的扱いは第 8 章，第 9 章で述べる）．

2. n-組において値（成分）に同じものがあるとき, 例えば 3- 組 $(3,2,2)$ を考えるとき，集合 $\{3,2,2\}$ と集合 $\{3,2\}$ は同一である．しかし 3-組 $(3,2,1)$ と対 $(3,2)$ はもちろん別ものである．
3. n-組という言葉が “順序づけられた n-組” を意味するのは，われわれがそのように約束したからであって，日常の生活では “順序を考えない n-組” のような概念が普通にあらわれる．例えば 40 円の電車の切符 1 枚，30 円の切符 2 枚を買うとき，そこで問題とされているものは，順序を考えない 3-組 $(40,30,30)$ である．順序

を無視してもなお集合 $\{40, 30, 30\} = \{40, 30\}$ とは全く異なるものと考えていることに注意する．順序を考えない n-組は，R^n において，成分の置換 (12, 3, 3) で互いに移る点をまとめて一つの元とみた商集合 (9, 1) の元であり，数学的には $\mathbb{R}^n$ の点，つまり順序のついた n-組よりもヤヤコシイものとなる（$n = 2$ のときは対角線 $x_2 = x_1$）で折り返して重ねた半平面の点)．だから，表立ってはこのようなものは考えないことにしよう．

なお，高校数学ふうにいえば，（順序づけられた）n-組 は$\mathbb{R}^n$ から n 個とる “重複を許す順列”，順序を考えない n-組は $\mathbb{R}$ から n 個とる “重複を許す組み合せ”，n 個の元よりなる $\mathbb{R}$ の部分集合は $\mathbb{R}$ から n 個とる “重複を許さない組み合せ” ということになるだろうか．