学校数学のうらおもて

“量の計算” を見直す

6　空間の中の量

小島順

数学セミナー 1978 年 1 月号

目次

概要

今まで “1 次元の量” を中心に考えてきたが，この最終回では空間 — 我々が住むこの空間 — の中の量について考えよう．

もちろん，それを組織的にということになると，「こここまで」という限界はなく，結局は数学と物理学の全体にひろがってしまう．ここでは，これまでの 1 次元の話を普通の数学（普通と言っても様々だが，ある程度現代的な）につなげることを目標に，いくつかの問題を考える．前半は力学の初歩的な部分，後半は奇種の微分形式（密度と電流）の話である．

1　力学にあらわれる量

“初等物理” での我々の空間を X と書く．これは 3 次元アフィン空間で，その点 x は運動する粒子（質点）の**位置**をあらわす．質点の運動の**速度** v は，T を時刻のアフィン空間として，$\vec{X} \otimes \vec{T} = L(\vec{T}; \vec{X})$ の元である．ただし，$\vec{X}$ と $\vec{T}$ はそれぞれ X, T に伴う（変位と時間の）線型空間で，$\vec{T}^*$ は $\vec{T}$ の双対である．

長さの単位として，例えば m（メートル）を選ぶ．これに対応して，東へ 1 m，北へ 1 m，上へ 1 m のように，互いに直行する長さが 1 m の三つのベクトルの組を $\tilde{\mathrm{m}} = (\tilde{\mathrm{m}}_1, \tilde{\mathrm{m}}_2, \tilde{\mathrm{m}}_3)$ と書く．これが $\vec{X}$ の枠となる．m はメートルという特定の長さだが，以下の議論では任意の長さの単位であって良いし，そのようなものとして s（未来へ向かう 1 秒）をとる．

このとき，速度 v は

$$v = (\xi^1 \tilde{\mathrm{m}}_1 + \xi^2 \tilde{\mathrm{m}}_2 + \xi^3 \tilde{\mathrm{m}}_3) \otimes \mathrm{s}^{-1}$$

のようにあらわされる．

質点の**状態**（state）とは位置と速度の対 (x, v) のことである．$T(X) = X \times (\vec{X} \otimes \vec{T}^*)$ は X 上の**状態空間**で，数学では X 上の接繊維空間（espace fibré tanget, tangent bundle）と呼ばれるものにあたる．状態 (x, v) が点 x における X への接ベクトルである（力学では $X \times \vec{X}$ の元と考えるよりこの方が好都合である）．

速度関数

$$t \mapsto v(t) \colon \mathbb{T} \to \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$$

を時刻 t_0 で微分したものが加速度 $\frac{dv}{dt}(t_0)$ で，これは $(\vec{X} \otimes \vec{T}^*) \otimes \vec{T}^*$ の元である．加速度の空間 — これを簡単のため $\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^{-2}$ と書くこともある— の元は一般に

$$a = (\eta^1 \tilde{\mathrm{m}}_1 + \eta^2 \tilde{\mathrm{m}}_2 + \eta^3 \tilde{\mathrm{m}}_3) \otimes \mathrm{s}^{-2}$$

の形にあらわされる．ただし $\mathrm{s}^{-1} \otimes \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{s}^{-2}$ と書いた．

X の接繊維空間の接繊維空間，つまり X の二重接繊維空間は，したがって

$$T^2(X) = X \times (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*) \times (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*) \times (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)$$

の形をしている．

状態の変化 $t \mapsto (x(t), v(t))$ は，$T(X)$ 上のベクトル場で，とくに

$$(x, v) \mapsto (x, v, v, a(x, v)); TT(X) \to T^2(X) \tag{1}$$

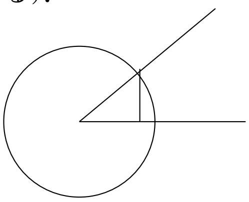
の形をしたもの，すなわち X **上の二階微分方程式**で決定される．言いかえると，微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = v(t) \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = a(x(t), v(t)) \end{cases}$$

と初期値 $(x(t_0), v(t_0)) = (x_0, v_0)$ から決定される．以後，<u>X 上の二階微分方程式が一つ与えられている</u>ものとしよう．

ここで X の**内積**について説明しよう．

我々は始点 O を共有する二つの半直線 l, l' について，l を回転して l' に重ねるやり方を知っている．それは X に<u>長さ</u>の概念があり，l 上の点 x に対して，O から等距離にある l' 上の点 x' を決めることができるということである．そればかりでなく，我々は l, l' の間の角 θ の cosine とはなんであるかを知っている．言いかえると，l' を l へ（そして l を l' へ）射影するという概念が意味をもっている（図では x' が x'' にうつる）．



こうして，二つのベクトル $x, y \in \vec{X}$ について，長さ $\|x\|, \|y\| \in \mathbb{L}$ と $\cos\theta \in [-1, 1]$ がきまり，その内積を

$$(x \mid y) = \cos\theta \|x\| \otimes \|y\| \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{L} = \mathbb{L}^{(2)} \tag{2}$$

で定義する[1)]．

$$\varPhi\colon (x, y) \mapsto (x \mid y); \quad \vec{X} \times \vec{X} \to \mathbb{L} \otimes \mathbb{L}$$

は双線型かつ対称で，正定値である．$\mathbb{L}^{(2)}$ に値をとる二階共変対称テンソルと言って

1）　直積 $\mathbb{L} \otimes \mathbb{L} = \mathbb{L}^2$ と区別して $\mathbb{L}^{(2)}$ と書いてみた．$\|x\| \otimes \|y\|$ の $\otimes$ は書くのを省略して今後 $\|x\|\|y\|$ と書くかもしれない．

もよい．

$$(\tilde{\mathrm{m}}_i \mid \tilde{\mathrm{m}}_j) = \begin{cases} \tilde{\mathrm{m}} \otimes \tilde{\mathrm{m}} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

だから，$x = \sum \xi^i \tilde{\mathrm{m}}_i, y = \sum \eta^j \tilde{\mathrm{m}}_j$ のとき

$$(x \mid y) = \left(\sum_i \xi^i \eta^i \right) \mathrm{m}^2 \tag{1}$$

となる．x の長さは

$$\|x\| = \sqrt{\sum (\xi^i)^2}\, \mathrm{m} = \sqrt{(x \mid x)} \in \mathbb{L}$$

であらわされる．

(2) あるいは (3) で表現される内積は長さの単位のとり方によらない，X に内在的なものであることに注意しよう．

普通の数学の本の内積は (3) の係数の $\sum_i \xi^i \eta^i$ だけを指すが，この意味の内積は長さの単位のとり方に二階反変的に依存する．それに m^2 をそえた $\varPhi$ がはじめて X だけから定まる内在的なものとなるのである．

我々の空間 $\vec{X}$ は単なる 3 次元空間ではない！ それはアプリオリに内積 $\varPhi$ を備えている．したがって $\vec{X}$ と $\mathbb{L}^{(2)} \otimes \vec{X}^*$ が同一視される：

$$\varPhi\text{に対して}, \tilde{\varPhi}\colon \vec{X} \to \mathbb{L}^{(2)} \otimes \vec{X}^*\text{を}, x \in \vec{X}\text{に対して}\tilde{\varPhi}(x)\colon y \mapsto (x \mid y)$$

とおくことで定める[2]．さまざまな同型がこの $\tilde{\varPhi}$ から派生する．

$x = \sum \xi^i \tilde{\mathrm{m}}_i$ に対して，$\tilde{\varPhi}(x) = \mathrm{m}^2 \otimes \sum \xi^i \tilde{\mathrm{m}}^i$ である．ただし，$\tilde{\mathrm{m}}^i$ は $\tilde{\mathrm{m}}^{-1}\colon \vec{X} \to \mathbb{R}^3$ の i-成分で，$(\tilde{\mathrm{m}}^1, \tilde{\mathrm{m}}^2, \tilde{\mathrm{m}}^3)$ が $(\tilde{\mathrm{m}}_1, \tilde{\mathrm{m}}_2, \tilde{\mathrm{m}}_3)$ に双対な $\vec{X}^*$ の枠となる．ここで m は任意の長さの単位でよい．そのことに係数を $\mathbb{L}^{(2)}$ にとることの効用があらわれる．$x = \sum (\alpha^{-1} \xi^i)(\alpha \tilde{\mathrm{m}}_i)$ のとき $\tilde{\varPhi}(x) = \mathrm{m}^2 \otimes \sum (\alpha \xi^i)(\alpha^{-1} \tilde{\mathrm{m}}^i)$ となることに見られるように x は“反変ベクトル”，$\tilde{\varPhi(x)}$ は“共変ベクトル”である．（記号のまぎらわしさに注意を！m^2 は $\mathrm{m} \otimes \mathrm{m}$ のことだし，$\tilde{\mathrm{m}}^2$ の 2 は反変成分をあらわす上ツキの添数 2 である．）

力学の中心にあるエネルギー，運動量，力などの概念を我々の立場から説明しておこう．

2） $\varPhi$ が定める correlation と呼ぶ．[1] では相関と書いたが，相反が普通（？）．

まず，エネルギーの 1 次元アフィン空間を $\mathbb{E}$ とすれば，質量 $m \in \mathbb{M}$（これは質量の線型空間）をもつ粒子の速度 v に対して，**運動エネルギー** $K(v) \in \vec{\mathbb{E}}$ は

$$K(v) = \frac{1}{2} m \otimes (v \mid v)$$

で与えられる．一般に $v, w \in \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ に対して，その内積 $(v \mid w) \in \mathbb{L}^{(2)} \otimes \mathbb{T}^{(-2)}$ を

$$(v \mid w) \colon (t_1, t_2) \mapsto (v \cdot t_1 \mid w \cdot t_2); \quad \vec{\mathbb{T}} \times \vec{\mathbb{T}} \to \mathbb{L} \otimes \mathbb{L}$$

で定める．だから $K(v) \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{(2)} \otimes \vec{\mathbb{T}}^{(-2)}$ となり，結局 $\vec{\mathbb{E}} = \mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{(2)} \otimes \vec{\mathbb{T}}^{(-2)}$ となる．しかしエネルギーはもっとも基本的な量の一つで，$\vec{\mathbb{E}}$ は右辺とは独立にはじめから存在するものと考える．単位の J（ジュール）について

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg} \otimes \mathrm{m}^2 \otimes \mathrm{s}^{-2} \tag{4}$$

が成立つ．

質量 $m = \mu\,\mathrm{kg}$，速度 $v = \sum \xi^i \tilde{\mathrm{m}}_i \otimes \mathrm{s}^{-1}$ のときの運動エネルギーは $K(v) = \frac{1}{2}\mu \sum (\xi^i)^2\,\mathrm{J}$ である．

写像

$$v \mapsto K(v); \quad \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* \to \vec{\mathbb{E}}$$

の v における微分 $dK(v) \in \vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)^*$ が**運動量**であって

$$dK(v) \colon \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* \to \vec{\mathbb{E}}; \quad w \mapsto m \otimes (v \mid w)$$

で与えられる[3)]．

$\tilde{\Phi}$ の一般化である標準的同型

$$m \otimes v \mapsto dK(v); \quad \mathbb{M} \otimes (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*) \to \vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)^*$$

によって，運動量は 質量 $\otimes$ 速度 という表現を合せもつことにある．むしろその "実体" は $m \otimes v$ で，それが内積によって速度（の v からの無限小変化）w に作用する，その "機能" が $dK(v)$ である，と言ってよい．

$$dK(v) = \mu \mathrm{J} \otimes \sum \xi_i \tilde{\mathrm{m}}^i \otimes \mathrm{s}$$

3） 位置と運動量の対が相（phase）であって，それは余接繊維空間（cotangent bundle）$T^*(X)$ の点である．Hamilton 力学はどちらかと言えば $T^*(X)$ を舞台とする

ならば

$$m \otimes v = \mu\,\mathrm{kg} \otimes \sum \xi_i \tilde{\mathrm{m}}_i \otimes \mathrm{s}^{-1}$$

であって，$w = \sum \eta^j \mathrm{m}_j \tilde{\otimes} \mathrm{s}^{-1}$ に対して

$$dK(v) \cdot w = m \otimes (v \mid w) = \mu(\sum \xi_i \eta^i)\mathrm{J}$$

となる．

2 力とは何か

さきに X 上の二階微分方程式 (1) が一つ与えられているとしたが，常微分方程式の解の一意性と存在の定理により，状態 (x_0, v_0) に対して，積分曲線 $t \mapsto (x(t), v(t))$ で，$(x(t_0), v(t_0)) = (x_0, v_0)$ となるものが（局所的に）唯一つある．これが状態の時間的変化をあらわす．これに伴う運動量の変化

$$t \mapsto dK(v(t)); \quad \mathbb{T} \to \vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)^*$$

を $t = t_0$ で微分すると，状態 (x_0, v_0) における**力** $f = f(x_0, y_0)$ が得られる．それは

$$\begin{aligned} f \colon \vec{\mathbb{T}} &\to \vec{\mathbb{E}} \otimes (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*)^*; \\ t_1 &\mapsto [w \mapsto m \otimes (v'(t_0)t_1 \mid w)] = dK(v'(t_0)t_1) \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} f \colon \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^* &\to \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*; \\ w &\mapsto [t_1 \mapsto m \otimes (v'(t_0)t_1 \mid w)] = m \otimes (v'(t_0 \mid w) \end{aligned}$$

で与えられ，$(\vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*) \otimes (\vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*) = \vec{\mathbb{E}} \otimes \vec{X}^*$ の元である．これに内積 $\varPhi$ に関して対応する $\tilde{f}$ は

$$\tilde{f}(x_0, v_0) = m \otimes v'(t_0) = m \otimes a(x_0 v_0) \in \mathbb{M} \otimes \vec{X} \otimes \vec{\mathbb{T}}^{(-2)}$$

で与えられる．

“同一の” 力が二つの表現をもつ．f は 仕事率 $\div$ 速度，あるいは，仕事 $\div$ 変位 の形をし，$\tilde{f}$ は 質量 $\times$ 加速度 の形をしている．数教協の「量の理論」の言葉を借りるな

らば，f は内包量，$\tilde{f}$ は外延量ということになるだろう（数教協が力についてのこのような分析をどう考えるかは別問題である）．

$$f = \mathrm{J} \otimes \sum f_i \tilde{\mathrm{m}}^i = W \otimes \sum f_i \tilde{\mathrm{m}}^i \otimes \mathrm{s}$$

に対して

$$\tilde{f} = \mathrm{kg} \otimes f_i \tilde{\mathrm{m}}_i \otimes \mathrm{s}^{-2}$$

とあらわされる．$\vec{X}$ の枠の取替に対して，f の成分は共変的に，$\tilde{f}$ の成分は反変的に動く．特に長さの単位を m から $\alpha\,\mathrm{m}$ に変えると，$f = \mathrm{J} \otimes \sum(\alpha f_i)\alpha^{-1}\tilde{\mathrm{m}}^i$ となり，成分は α 倍される．これに対して $\tilde{f} = \mathrm{kg} \otimes \sum \frac{f_i}{\alpha} \alpha \tilde{\mathrm{m}}_i \otimes \mathrm{s}^{-2}$ となり，成分は $frac1\alpha$ 倍される[4)]．

力の “大きさ” は $\tilde{f} = \mathrm{kg} \otimes \sum f_i \tilde{\mathrm{m}}_i \otimes \mathrm{s}^{-2}$ に対して

$$\sqrt{(\sum {f_i}^2)}\mathrm{kg} \otimes \mathrm{m} \otimes \mathrm{s}^{-2} \in \mathbb{M} \otimes \mathbb{L} \otimes \vec{\mathbb{T}}^{(-2)}$$

で与えられる．その単位が $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \otimes \mathrm{m} \otimes \mathrm{s}^{-1}$ である．$\tilde{\mathrm{m}}^1$ の方向の $1\,\mathrm{N}$ の力とは変位 $1\,\mathrm{m}$ あたり $1\,\mathrm{J}$ の仕事をする力であり（$f = \mathrm{J} \otimes \tilde{\mathrm{m}}^1$），$1\,\mathrm{kg}$ の質点に $1\,\mathrm{m/s}^2$ の加速度をもたらす力である（$\tilde{f} = \mathrm{kg} \otimes \tilde{\mathrm{m}}_1 \otimes \mathrm{s}^{-2}$）．

力が**ポテンシャル**から導かれる “保存系” の場合を考えよう．位置 x に対してポテンシャル $U(x) \in \mathbb{E}$ が定まり，状態 (x, v) がもつそうエネルギーが $e(x, v) = K(v) + U(x)$ であるとしよう．

解 $t \mapsto (x(t), v(t))$ に沿ってエネルギーが一定という仮定から

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} e(x(t), v(t)) \\ &= m \otimes \left(\frac{dv}{dt}(t) \mid v(t) \right) + dU(x(t)) \cdot v(t) \end{aligned}$$

だから，状態 (x, v) における力 f は $-dU(x)$ で与えられる．

dU は U から定める**勾配**であって，これは（したがってこの場合の力 f は）$\vec{\mathbb{E}}$ に値をとる X 上の微分形式（通常の，偶種の）とみなされる．X の枠 $(x_0; \tilde{\mathrm{m}}_1, \tilde{\mathrm{m}}_2, \tilde{\mathrm{m}}_3)$ に関する x の座標を $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ とし，

$$U(x) = U(x_0) + \bar{U}(x)\mathrm{J}, \quad \bar{U}(x) \in \mathbb{R}$$

4） 長さの単位を m から αm に変えるというとき，エネルギーの単位 J はそれと無関係で一定である．しかし，(5) と (6) の対応における J は “変数”m の値に応じて (4) によって変化させなければならない．

とするとき，

$$dU(x) = \mathrm{J} \otimes \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi^i}(\xi)\tilde{m}^i \quad \left(dU = \mathrm{J} \otimes \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi^i} d\xi^i \right)$$

である．

状態 (x_1, v_1) から状態 (x_2, v_2) にかわるときの運動エネルギーの増加は，一般に運動 $t \mapsto x(t)$ に沿う力 f の積分で与えらえる．すなわち，$x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ として

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x(t)), x'(t)) \cdot x'(t)\, dt$$

で与えられる．今の $f = -dU$ の場合には，$U^*(t) = U(x(t))$ として

$$-\int_{t_1}^{t_2} dU^* = U^*(t_1) - U^*(t_2) = U(x_1) - U(x_2)$$

となる（運動エネルギーの増加が位置エネルギーの減少に一致するという当然の結果）．

なお $\mathbb{T}$ の枠を $(t_0; \mathrm{s})$，t の座標を τ とすれば，$t_i = t_0 + \tau_i \mathrm{s}$ $(i = 1, 2)$ として，上の積分 h あ

$$\int_{t_1}^{t_2} dU^* = \mathrm{J} \otimes \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\bar{U}}{d\tau}, d\tau$$

のように $\mathbb{R}$上の向きづけた空間での積分に帰着する．

$\tilde{\Phi}$ によって dU に対応する X 上のベクトル場は普通 $\operatorname{grad} U$ と書かれるが，それは

$$\operatorname{grad} U(x) = \mathrm{kg} \otimes \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi^i}(\xi)\tilde{\mathrm{m}}_i \otimes \mathrm{s}^{-2}$$

の形をしている．そして

$$\tilde{f}(x, v) = -\operatorname{grad} U(x)$$

となっている．

3　交代積ついて

まず X を一般の 3 次元線型空間とする．二つのベクトル x, y の交代積 $x \wedge y$ というものを定義しよう．

それはテンソル積の場合と同じように，一つの “普遍問題” の解として得られる：

Y をもう一つの線型空間とするとき，双線型写像 $\varphi\colon X\times X\to Y$ が交代（反対称）であるとは

$$\varphi(x,y)=-\varphi(y,x)\quad \forall (x,y)\in X\times X$$

が成立つことを言う．

$X\times X\xrightarrow{\varphi_0}Y_0$ が交代のとき，任意の線型写像 $Y_0\xrightarrow{u}Y$ に対して $u\varphi_0$ は交代だが，$X\times X$ からの交代写像がすべてこの一つの φ_0 から今の方法で一意的に得られるとき，言いかえると，任意の Y と任意の交代な φ に対して

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & & Y \\ & Y_0 \arrow[ur, dashed, "u"'] & \end{tikzcd}$$

が可換となる u が唯一つ存在するとき，φ_0 は $X\times X$ 上の普遍交代双線型写像である．$Y_0=X\wedge X=\bigwedge^2 X$ と書き，$\varphi_0(x,y)=x\wedge y$ と書く．$\bigwedge^2 X$ は X の 2 次の交代テンソル積（あるいは単に交代積）と言う．$x\wedge y$ は x と y の交代積である．

φ_0 の一意性はテンソル積の場合と同様に "同値類" として成立つ．存在については次のような構成法をとることにしよう：

$X^2=X\times X, \otimes^2 X=X\otimes X$ と書くことにし，テンソル積

$$\sigma\colon X^2\to\otimes^2 X;\quad (x,y)\mapsto y\otimes x$$

を考えると，これは双線型だから，テンソル積の普遍性により，σ は線型写像 $\otimes^2 X\to\otimes^2 X$ とみることができ，この場合 $\sigma(x\otimes y)=y\otimes x$ となる．$\otimes^2 X$ の中で $z+\sigma z$ の形の元の全体が生成する部分線型空間を N とし，N による商空間で $\bigwedge^2 X$ を定義する．そして

$$\pi\colon\ \otimes^2 X\to\otimes^2 X/N=\bigwedge^2 X$$

を標準上射として，$\pi(x\otimes y)=x\wedge y$ と定義する．あきらかに $y\wedge x=-x\wedge y$ となり，$(x,y)\mapsto x\wedge y$ は交代双線型である．

X の枠を (e_1,e_2,e_3) とするとき，$\otimes^2 X$ は 9 次元で

$$\{e_i\otimes e_j\mid i\in\bar{3}, j\in\bar{3}\}\quad (\bar{3}=\{1,2,3\})$$

を基底にもつが，$\bigwedge^2 X$ は 3 次元で，$\{e_1\wedge e_2, e_2\wedge e_3, e_3\wedge e_1\}$ を基底にもつ．要するに，$e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1=0$ という関係を入れたときの $e_1\otimes e_2$（の類）が $e_1\wedge e_2$ なのである．

$\bigwedge^2 X$ の元を X の 2-**ベクトル**と言う．それは

$$z = \zeta^1 e_2 \wedge e_3 + \zeta^2 e_3 \wedge e_1 + \zeta^3 e_1 \wedge e_2$$

の形にあらわされる．

$x = \sum \xi^i e_i, y = \sum \eta^j e_j$ に対して，その交代積は

$$x \wedge y = ({}^2\eta^3 - \xi^3\eta^2)e_2 \wedge e_3 + ({}^3\eta^1 - \xi^1\eta^3)e_3 \wedge e_1 + ({}^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)e_1 \wedge e_2$$

という 2-ベクトルとなる．この計算は全く機械的にやることができる．双線型性の他に規則

$$\begin{cases} e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i & (i \neq j) \\ e_i \wedge e_i = 0 & (i \in \bar{3}) \end{cases}$$

に従えばよい．

3 次の交代積 $bigwedge^3$ も全く同様に $\otimes^3 X$ の商空間として定義できる．もっとも我々は 3 次のテンソル積 $\otimes^3 X$ をキチンと定義はしなかったのだが，それは三重線型写像の普遍問題の解として 2 次の場合と平行にやれる．

$\varphi\colon X^3 \to Y$ が交代とは $\bar{3} = \{1, 2, 3\}$ の置換 σ に対して

$$(\sigma f)\,(x_1, x_2, x_3) f(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, x_{\sigma_3})$$

と定義するとき，σ の符号を ε_σ として，$\sigma f = \varepsilon_\sigma f$ であることを言う．置換 σ は $\otimes^3 X$ に作用し，

$$\sigma(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = x_{\sigma_1} \otimes x_{\sigma_2} \otimes x_{\sigma_3}$$

となる．N を $z - \varepsilon_\sigma(\sigma z)$ の形の元の全体（σ は 6 個ある）の生成する部分空間とし，$\bigwedge^3 X = \otimes^3 X/N$ と定義する．$\otimes^3 X$ は $\{e_i \otimes e_j \otimes e_k \mid i \in \bar{3}, j \in \bar{3}, k \in \bar{3}\}$ を基底として 27 次元だが，$\bigwedge^3$ は $\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$ を基底として 1 次元である．$\bigwedge^3 X$ のベクトルを **3-ベクトル**と言う．

$\bigwedge^2 X$ と $\bigwedge^2 X^*$ の双対性． X の双対 X^* の交代積 $\bigwedge^2 X^*$ は X の交代積 $\bigwedge^2 X$ の双対と同一視できる．

実際，$(f, g) \in (X^*)^2$ に対して

$$\begin{aligned} &\gamma(f, g) = f \otimes g - g \otimes f\colon \\ &\quad (x, y) \mapsto (fx)\,(gy) - (fy)\,(gx); \quad X^2 \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

とおけば，$\gamma(f,g)$ は交代双線型だから交代積の普遍性により，$\gamma(f,g) \in (\bigwedge^2 X)^*$ とみることができる．

$\gamma\colon (f,g) \mapsto \gamma(f,g)$ も交代双線型だから，ふたたび普遍性により，$\gamma \in L(\bigwedge^2 X^*; (\bigwedge^2 X)^*)$ とみることができて，

$$\gamma(f \wedge g)\,(x \wedge y) = (fx)\,(gy) - (fy)\,(gx)$$

である．γ は同型であって，(e_1, e_2, e_3) に双対な X^* の枠を (e^1, e^2, e^3) とするとき，$(e^1 \wedge e^2, e^2 \wedge e^3, e^3 \wedge e^1)$ が $(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1)$ に双対な $\bigwedge^2 X^* = (\bigwedge^2 X)^*$ の枠となる．

3 次の場合も同様に $\bigwedge^3 X^* = (\bigwedge^3 X)^*$ と考えることができる．その場合

$$(f^1 \wedge f^2 \wedge f^3) \cdot (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) = \det \begin{bmatrix} f^1x_1 & f^1x_2 & f^1x_3 \\ f^2x_1 & f^2x_2 & f^2x_3 \\ f^3x_1 & f^3x_2 & f^3x_3 \end{bmatrix}$$

となるのが普通の約束である．

行列式について． X の線型変換 u は $\bigwedge^3 X$ の線型変換 $\bigwedge^3 u$ を $x \wedge y \wedge z \mapsto (ux) \wedge (uy) \wedge (uz)$ となるように定めるが（例によって普遍性！），$\bigwedge^3 X$ は 1 次元だから，これは “倍変換” である．この倍率が u の行列式 $\det u$ に他ならない：

$$(ux) \wedge (uy) \wedge (uz) = (\det u) x \wedge y \wedge z$$

である．

空間の向き． 1 次元空間 $\bigwedge^3 X$ の向きによって X の向きを定義する．つまり $\bigwedge^3 X$ の 0 でない元 — それはすべて $x \wedge y \wedge z$ の形に書ける — を一つ選ぶことで X の向きが定まる．

$$x \wedge y \wedge z \neq 0 \leftrightarrow (x, y, z) \text{が} X \text{の枠}$$

であって，X の枠を一つ与えると，X の向きがきまることになる．そして，二つの枠について，枠の取替の行列式が正ならば同じ向きを，負ならば反対の向きを与える．

4　体積について

ここで最初にもどり，X を我々が住む 3 次元アフィン空間とし，$\vec{X}$ をそれぞれに伴う線型空間とする．

長さの単位を $\mathrm{m} \in \mathbb{L}$ とするとき，$\tilde{\mathrm{m}} = (\tilde{\mathrm{m}}_1, \tilde{\mathrm{m}}_2, \tilde{\mathrm{m}}_3)$ を m に関する “正規直交枠” とすれば，$\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3$ が $\bigwedge^3 \vec{X}$ の単位となる．$\hat{\mathrm{m}} = (\hat{\mathrm{m}}_1, \hat{\mathrm{m}}_2, \hat{\mathrm{m}}_3)$ を同じ長さ m に関する別の正規直交枠とすれば，$\tilde{\mathrm{m}}$ を $\hat{\mathrm{m}}$ に取替える線型変換 u は $\vec{X}$ の直交変換だから，$\det u = \pm 1$，したがって

$$\hat{\mathrm{m}}_1 \wedge \hat{\mathrm{m}}_2 \wedge \hat{\mathrm{m}}_3 = \pm \tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3$$

である．係数の ± 1 は $\hat{\mathrm{m}}$ と $\tilde{\mathrm{m}}$ が同じ $\vec{X}$ の向きを与えるかどうかに対応している．

$\vec{X}$ の向き α をしているするとき，$\tilde{\mathrm{m}}$ が $(\vec{X}, \alpha)$ の正の正規直交枠のときの，$\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3$ は $\mathrm{m} \in \mathbb{L}$ に対して一意的に定まる．$\mathrm{m} \otimes \mathrm{m} \otimes \mathrm{m}$ を m^3 書くとき，

$$\otimes^3 \mathbb{L} \to (\bigwedge^3 \vec{X}, \alpha); \quad \mathrm{m}^3 \mapsto \tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3$$

は標準的な同型を定める（ここで m は “変数” と考えている）．

$x_i = \sum \xi_i^j \tilde{\mathrm{m}}_j \ (i \in \bar{3})$ とするとき，

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = \det \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_1^3 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 \end{bmatrix} \tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3 \tag{7}$$

である．$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ は (x_1, x_2, x_3) が張る平行六面体の “代数的体積”（符号を伴う体積）であって，(7) にあらわれる行列式がそれを単位 $\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3$ で測った数値である．

$\tilde{\mathrm{m}}$ に双対な $(\tilde{\mathrm{m}}^1, \tilde{\mathrm{m}}^2, \tilde{\mathrm{m}}^3)$ に対する $\tilde{\mathrm{m}}^1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}^2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}^3$ が上の単位に双対な $\bigwedge^3 \vec{X}^*$ の枠であって，それは長さの単位 $\mathrm{m} \in \mathbb{L}$ と $\vec{X}$ の向き α が定める $\vec{X}$ の**代数的体積の測度**である．

X の枠に関する点の座標を $(x_0; \tilde{\mathrm{m}}^1, \tilde{\mathrm{m}}^2, \tilde{\mathrm{m}}^3)$ に関する点 x の座標を $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ とするとき，各点 x ごとにこの測度 $\tilde{\mathrm{m}}^1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}^2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}^3$ を値にするのが 3 次の微分形式 $d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3$ である．これに対して

$$\Omega = (\tilde{\mathrm{m}}^1 \wedge \tilde{\mathrm{m}^2} \wedge \tilde{\mathrm{m}}^3) \otimes d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3$$

は $\bigwedge^3 \vec{X}$ の元を係数にする X 上の 3-微分形式だが，各点 x で $\Omega(x)$ は identity（体積を “確認” にする！）で，Ω のことを X の**基本 3-微分形式**と呼ぶ．これは長さの単位にも向きの選び方にも無関係である．

5　奇種の量について

前回の 1 次元の場合の奇種の量の話は，今の X においてもそのまま成立つ．

$x \wedge y \wedge z \neq 0$ のとき，$(x \wedge y \wedge z) \otimes \mathrm{Or}(x \wedge y \wedge z) = \underline{x \wedge y \wedge z}$ は $\bigwedge^3 X \otimes \mathrm{Or}\, X = \underline{\bigwedge^3 X}$ の“正の元”で，これが (x, y, z) の定める平行体，つまり集合 $\{\lambda_1 x{+}\lambda_2 y\lambda_3 z \mid 0 \leq \lambda_i\lambda 1$ の“本来の体積”をあらわす．$\underline{\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3}$ がその単位で，$\tilde{\mathrm{m}}_3 \mapsto \underline{\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3}$ が $\otimes^3 \mathbb{L}$ と $\underline{\bigwedge^3 \vec{X}}$ の標準的同型を与える．

$(\bigwedge^3 \vec{X} \otimes \mathrm{Or}\, \vec{X})^* = \bigwedge^3 \vec{X}^* \otimes \mathrm{Or}\, \vec{X} = \underline{\bigwedge^3 \vec{X}^*}$ の元であるところの $\underline{\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3} = \tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3 \otimes \mathrm{Or}(\tilde{\mathrm{m}})$ は上の単位に関する体積の測度になる．その場が X 上の**体積測度** $\underline{d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3}$ で，これは**奇種の**（あるいは**捩**）**3-微分形式**である．

X 上の**質量分布**は

$$\omega = \gamma\, \mathrm{g} \otimes \underline{d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3}$$

のように，密度の場として，言いかえると $\mathbb{M}$ に値をとる奇種の 3-微分形式として表わされる．

$$\omega \colon X \to \mathbb{M} \otimes \underline{\bigwedge^3 \vec{X}^*};$$
$$\omega(x) \cdot (\underline{x_1 \wedge x_2 \wedge x_3}) = \gamma(x)\, \mathrm{g} |\det(\xi^i_j)|$$

である（行列式に絶対値記号が付く．なお，文字の選び方がまずかったのだが，x は点，x_1, x_2, x_3 はベクトルである）．

可測集合 $A \subseteq X$ に対して，A における ω の積分 $\int_A \omega$ が $\mathbb{R}^3$ における普通の積分 $g \int_{A'} \gamma(\xi)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ で定義される．ただし，A' は A に対応する $\mathbb{R}^3$ の領域，$d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ は Lebesgue 測度である．こうして密度 ω は“加法的集合関数”としての質量の測度ともみなされる（数教協はこのときの ω を外延量と呼ぶ（？））．

同じように，奇種の基本 3-微分形式を

$$\begin{aligned}\underline{\mathit{\Omega}} &= \underline{(\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3)} \otimes \underline{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3} \\ &= \mathrm{m}^3 \otimes \underline{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}\end{aligned}$$

で定義すれば，$A \subseteq X$ の体積は

$$\int_A \underline{\mathit{\Omega}} = \mathrm{m}^3 \int_{A'} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

で与えらえる．$\underline{\Omega}$ は集合関数

$$\underline{\Omega}\colon A \mapsto \underline{\Omega}(A) = \int_A \underline{\Omega}$$

に拡張される．

なお，密度 ω を使って，$\omega = (\gamma\,\mathrm{g} \otimes \mathrm{m}^{-3}) \otimes \underline{\Omega}$ と書ける．係数の $\gamma\,\mathrm{g} \otimes \mathrm{m}^{-3}$ は 1 次元空間 $\mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{(-3)}$ に値をとる X 上の関数（スカラー場）である．このように，我々の空間 X では奇種の 3-微分形式は（偶種の）関数と同一視される．

6　電流について

電流は奇種の 2-微分形式である．まず，0 でない 2- ベクトル $e_1 \wedge e_2$ に対し，$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$ なるベクトル e_3 は (e_1, e_2) が張る平面 $\vec{F}$ の $\vec{X}$ における**横断的（transversal）な向き**，すなわち $\vec{X}/\vec{F}$ の向きを定める．そして，$\vec{X}$ の向き α との対 $(e_1 \wedge e_2, \alpha)$ に対して $\mathrm{Or}(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = \alpha$ なる e_3 の定める横断的向き ν が対応する．$(e_2 \wedge e_1, -\alpha)$ にも同じ ν が対応するから $(e_1 \wedge e_2) \otimes \alpha \in \bigwedge^2 \vec{X} \otimes \mathrm{Or}\,\vec{X}$ が ν を定める．結局 $(e_1 \wedge e_2) \otimes \alpha = (\underline{e_1 \wedge e_2}, \nu)$ と書くことができる．

点 x における電流の強さは，その点における面の大きさに対する通過量（時間あたり）の比，すなわち電流密度であらわされる．それを “すべての方向” の面について考えた総体が電流の強さである．さらに面の横断的向きを反対にすると，同じ電流の表現は符号を変える．こうして，x における電流密度は，I を電流の 1 次元空間として[5)]，

$$(\underline{e_1 \wedge e_2}, \nu) \mapsto \gamma(x)\,\mathrm{A}; \quad \bigwedge^2 \vec{X} \otimes \mathrm{Or}\,\vec{X} \to \mathbb{I}$$

のような形であらわされる．それは $\mathbb{I} \otimes^2 \vec{A}^* \otimes \mathrm{Or}\,\vec{X}$ の元である．

これを各点で考えるのだから，電流密度は X 上の $\mathbb{I} \otimes^2 \vec{X}^* \otimes \mathrm{Or}\,\vec{X}$ に値をとるテンソル場，言いかえると $\mathbb{I}$ に係数をとる**奇種の 2-微分形式**ということになる．長さの単位 m を用いると，それは

$$\begin{aligned}\omega &= \mathrm{A} \otimes (\gamma_1 d\xi^2 \wedge d\xi^3 + \gamma_2 d\xi^3 \wedge d\xi^1 + \gamma_3 d\xi^1 \wedge d\xi^2) \otimes \mathrm{Or}(\tilde{\mathrm{m}}_1 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_2 \wedge \tilde{\mathrm{m}}_3)\\ &= \mathrm{A} \otimes (\gamma_1 \underline{d\xi^2 \wedge d\xi^3} \otimes \mathrm{Or}(\tilde{\mathrm{m}}_1) + \gamma_2 \underline{d\xi^3 \wedge d\xi^1} \otimes \mathrm{Or}(\tilde{\mathrm{m}}_2) + \gamma_3 \underline{d\xi^1 \wedge d\xi^2} \otimes \mathrm{Or}(\tilde{\mathrm{m}}_3))\end{aligned}$$

の形に書ける．

5）　電気量の空間 $\mathbb{Q}$ に対して $\mathbb{I} = \mathbb{Q} \otimes \vec{\mathbb{T}}^*$ である．単位は A（アンペア）．

曲面 S を通過する電流は，S とその横断的向き ν の対 (S,ν) に対して定義され，積分 $\int_{(S,\nu)} \omega$ で与えられる．S 自身の（内性の）向きには何の関係もない．

我々の空間 X では奇種の基本形式 $\underline{\Omega}$ が決まっているから，3-奇形式が関数と同一視されたように，奇種の 2- 微分形式はベクトル場でおきかえられる．

ω には

$$v(x) = \mathrm{A} \otimes \mathrm{m}^{-3} \otimes (\gamma_1 \tilde{\mathrm{m}}_1 + \gamma_2 \tilde{\mathrm{m}}_2 + \gamma_3 \tilde{\mathrm{m}}_3) \in \mathbb{I} \otimes \mathbb{L}^{(-3)} \otimes \vec{X}$$

で定まる，$\mathbb{I} \otimes \mathbb{L}^{(-3)}$ に係数をとるベクトル場 v が対応する．（同じ成分 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ がつかわれていても，ω では二階共変的，v では反変的であることに注意しよう．とくに m を $\alpha\,\mathrm{m}$ にかえるとき，γ_i は $\alpha^2\gamma_i$ に変るが，$\gamma_i\,\mathrm{m}^{-3}$ は $\alpha^2\,\gamma_i\,(\alpha\,\mathrm{m})^{-3=\alpha^{-1}\gamma_i\,\mathrm{m}^{-3}}$ に変る）．

7　distribution と current

以上をまとめると，質量分布は密度として，言いかえると $\mathbb{M}$ に係数をとる奇種の 3-微分形式（あるいは $\mathbb{M} \otimes \mathbb{L}^{(-3)}$ に値をとる関数）であらわされる．ここでは “連続的” な分布を考えたが，空間の中の質量の点分布（Dirac 測度），線分布，面分布のようなものを統一的に考えるのが測度の一般的概念（Radon 測度）である．質量分布はこれで間に合うのだが，さらに Schwartz は測度でもとらえられない電荷の分布（双極子，二重層ポテンシャルなど）をも統一的にとらえるために，測度の拡張としての “distribution” の概念を考えた（おれは超関数と訳されているが，まさに “分布” そのものである．ブルバキの翻訳 [8] の 67 ページでは**荷度**）．

一方，電流は $\mathbb{L}$ に係数をとる奇種の 2-微分形式として（あるいは $\mathbb{I} \otimes \mathbb{L}^{(-3)}$ に係数をとるベクトル場として）あらわされる．この考察が de Rham にとってカレント（current，courant）の概念のもとになった．current はまさに “電流” である（私の考えた訳語は**流度**）．この場合も 密度 $\subset$ 測度 $\subset$ 荷度 という一般化に平行して，current は空間の線電流やスピンを持つ電荷も統一的にあつかえる一般概念である．そして電流が次数 2（次元 1）の current であるのに対して，質量分布は次数 3（次元 0）の current である，というふうに荷度も特別の場合として current に含まれる．

6 回にわたった “量の計算” をこのあたりでやめる．この回の議論はとくに中途半端な感じだが，はじめに書いたように，普通の数学や物理そのものが量の計算の理論（少なくともその大きな側面は）なのだから，それも当然と言える．

力学についての前半は [1] の 326 ページに書いたことをふくらましたものだが，そこではまだ，$\mathbb{L}^{(2)}$ に値をとる内在的な内積ということを考えてはいなかった．この先のことについては，Loomis and Sternberg[2] の最後の章（classical mechanics）が入門書として使えると思う．高橋利衛氏の大きな本『基礎工学セミナー』[3] は，とくに第 12 章から第 18 章までが Hamilton 力学に直接関係があるが，全体を通して大変面白い．あまりよく理解できないけれども，それでも大抵の数学者の書くものよりは学ぶところが多かった．

密度と電流については，前回も引用した Schwartz [4]，[5] を読みながら書いた．ブルバキでは [8] の §10 が「振れ形式」の話である．Grauert und Lieb の教科書 [6] の最後の章も参考にした．なお密度のより進んだ考察が [2] の第 10 章（The integral calculus on manifold）にある．

銀林浩氏のいう「内包量の四つのタイプ」[7]（密度・勾配・流量・速度）というものを一応意識しながら書いたが，取り上げる角度はかなりずれたものとなった．

文献表

[1] 小島順『線型代数』（日本放送出版協会，1976）

[2] Loomis and Sternberg “Advanced Calculus” (1968, Addison-Wesley; “Revised Edition” 2014, World Scientific Publishing)

[3] 高橋利衛『基礎工学セミナー — 量の理論／現象の論理と法則の構造をめぐる討論』（現代数学社，1974）

[4] L. Schwartz “Les tenseurs” (Hermann, 1975)

[5] L. シュワルツ著 岩村・石垣・鈴木訳『超函数の理論』（岩波書店，1971）

[6] Grauert und Lieb “Differential- und Integralrechnung III: Integrationstheorie Kurven- und Flaechenintegrale Vektoranalysis” (Springer, 1968, 1977)

[7] 銀林浩『量の世界／構造主義的分析』（麦書房，1975）

[8] ブルバキ著　斎藤正彦訳『多様体論要約』2 （東京図書，1970）

（完）

（こじま　じゅん／早稲田大学）