

学校数学のうらおもて

“量の計算”を見直す

1 教科書の中の定義

小島順

数学セミナー 1977 年 8 月号

目次

1	量の計算と数値の計算	2
2	高校物理の教科書	4
3	中学校では	7
4	マトモな教科書もある	8
5	数学の本では	10

概要

「学校数学」とは小・中・高校の授業科目としての数学をさすのだろうが、ここではもう少し広く、“学校の中の数学”ととらせてもらうことにし、理科、とくに物理の中での量の計算を中心に、その“数学的形式”を検討することにする。ほんとうは“生活の中の数学”がよいのだが、実際には、ある程度、“学校の中”で代表させることができるわけだ。

本誌先月号の特集「線型代数を考える」[9]の一つとして私は「量の計算と線型代数」を書いた。これは、どちらかと言えば、線型代数の体系がまずあって、その中に“量の計算”をはめこんだようなところがある。それについては、量の計算の数学的形式は現代風な線型代数あの初歩的部分そのものだという言い訳はあるのだが、大部分の「数学者」は学校での量の計算など考えたこともないわけで、彼らに

とっては、私が一体なにを言おうとしているのか、それがまずハッキリしないということになる。一方、読者の中には、こういう数学のスタイルが唐突でなじめないという方も多いと思う。そこで今度は、向きをかえて、学校での量の計算の実状から出発することにし、その数学的形式を整理する中で、読者に“現代数学”の一つのスタイルに慣れてもらう、という方針でいきたい。この第1回では、実際に教科書などで書かれている量の計算のやり方を調べることにしよう。

1 量の計算と数値の計算

私たちは日常の生活の中で、さまざまな量の計算をしている。例えば

$$\text{距離} \div \text{時間} = \text{速度},$$

$$\text{速度} \times \text{時間} = \text{距離}$$

のような式 (formula) を考えよう。速度を v 、時間を t 、距離を s というように、それぞれの量を簡単な一つの文字でおきかえると、これらの式は

$$s/t = v \tag{1}$$

$$vt = s \tag{2}$$

のようになる。

時速 8km で 3 分経過するとどれだけ進むか、というとき、我々は (2) に、 $v = 8\text{km/時}$ 、 $t = 3\text{分}$ を代入し、

$$\begin{aligned} s &= 8\text{km/時} \times 3\text{分} = \frac{8 \times 10^3 \text{m}}{60 \text{分}} \times 3\text{分} \\ &= \frac{8 \times 10^3 \times 3}{60} \cdot \frac{\text{m分}}{\text{分}} \\ &= 400\text{m} \end{aligned}$$

とやり、「400m だけ進む」と答える。念のために注意すると、(2) では v, t, s は量そのものであって、数値を表わしているのではない。つまり $vt = s$ は“量そのものの公式”である。もちろん、これから“数値の公式”を導くことができる。すなわち—

$v = a\text{m秒}$ 、 $t = x\text{m秒}$ を、 $vt = s$ の左辺に代入して計算すると

$$a\text{m/秒} = ax\text{m} \tag{3}$$

となるから、一方で $s = y \text{ m}$ とおけば $y = ax$ である。こうして、数値による公式

速度 $a \text{ m/秒}$ で x 秒に $y \text{ m}$ 動くとき

$$y = ax \quad (4)$$

が得られる。単位の選び方を変えると

速度 $a \text{ km/時}$ で x 時間に $y \text{ km}$ 動くとき

$$y = ax \quad (5)$$

速度 a ノットで x 時間に y 海里¹⁾ 動くとき

$$y = ax \quad (6)$$

など、さまざまな公式ができる。

式 $y = ax$ の実質は“比例定数”の a なのだが、同一の物理量 v に対して、この a は (4), (5), (6) でそれぞれ異なる。(2) が物理量そのものについての普遍的な公式であるのに対して、(4), (5), (6) は単位の組を定めることで得られる、(2) の一つの表現に過ぎない。

さきほどの $v = 8 \text{ km/時}$, $t = 3$ 分 というとき、公式 (4) を使おうとすれば、

$$8 \text{ km/時} = \frac{8 \times 10^3}{60^2} \text{ m/秒}, \quad 3 \text{ 分} = 3 \times 60 \text{ 秒}$$

より $a = \frac{8 \times 10^3}{60^2}$, $x = 3 \times 60$ を (4) に代入して、

$$y = \frac{8 \times 10^3}{60^2} \times 3 \times 60 = 400$$

という数値を求め、 $y \text{ m} = 400 \text{ m}$ を答としなければならない。

(5) を使うなら、 $a = 8$, $x = \frac{3}{60}$ を代入して $y = 0.4$ という数値を求め、 $y \text{ km} = 0.4 \text{ km} = 400 \text{ m}$ を答としなければならない。

あるいは

速度 $a \text{ m/分}$, 時間 x 分, 距離 $y \text{ m}$ のとき

$$y = ax \quad (7)$$

という公式を新しく作り、 $a = \frac{8 \times 10^3}{60}$, $x = 3$ を代入して... という結末になる。

1) 1海里 = 1852 m.

量の公式 (2) だと丸ゴトのデータをそのまま代入し、機械的に計算することができる。したがって数値の公式 (4) や (5) を使うよりやさしい。何よりも、このような量の計算をするときは、量の積そのものに関心があるのであって、 $8 \times \frac{3}{60}$ などという数値の積に関心があるのではないはずだから、量の公式の方がよいに決っている。数値の公式しか使えない（使ってはならない）とすれば、それは大変バカゲていると思う。

2 高校物理の教科書

世間一般での実際の計算の仕方はどうなっているのだろうか。高校の物理の教科書などを調べてみると、いろいろなことがわかる（よくわかるようには書かれていないことがまず分る — あとで述べる [5] のような例外もあるが）。ここでは“法則は数式で表わされる”というように書かれている。それは“物理は表現の道具 — つまり言語 — として数学を使う”ということでもあるだろう。ところが普通の人（おそらくは教科書の著者も含めて）の意識にある数学では、計算（ここでは四則演算）が適用できるのは数値についてだから、“数式”としての $vt = s$ などで、文字 v, t, s は量そのものではあり得ず、整合的な単位で測った数値だけということになる。ところがタテマエとしてはそうであっても、物理の本では物理量そのものが背後にあるわけだから、その関係が的確に処理できずに、混乱したアイマイな記述となる— これが大部分の教科書の姿だと思う。

(4)~(6) などは数値の公式として、それなりにスジが通っており、何のアイマイさもないが、現実の物理の教科書はこうでない。実例について検討しよう。今の速度の部分（これは高校物理の最初の“数式”である）を三冊の本から抜き出してみる。

「講談社」[1] t 秒(s) 間に l [m] 移動した時の速さを

$$v = \frac{l}{t} [\text{m/s}]$$

のように表わす²⁾。

[m/s] は、速さを測る単位の一つである。....

「東京書籍」[2] 時間 t [s] のあいだに距離 s [m] だけ進むとき、そのあいだの速さ v は、

$$v = \frac{s}{t} \quad (\dots(1))$$

2) 組版時の注意：原文で、単位を囲むカッコは $[\]$ であるが、 \LaTeX には数式記号として $[\]$ がないので、すべて $[\]$ で代用した。

で計算される。... 単位はメートル毎秒（記号 m/s）を使う。

速さをあらわすには、..., 物理では、(1) 式で定義される m/s が使われる。

「大日本図書」[3] ..., t 秒の間、いちような速さで動いているものとする。動いた距離を x m とすれば、速さ v は、

$$v = \frac{x}{t} [\text{m/s}]$$

で表わされる。

こういう文章の特徴は、検討しようにも、まず何を、どういうつもりで書いているのか、はっきりつかめないという点にある。[1] では t 秒と l m が同じ立場で並んでいる。[2] では t [s], s [m], v が、[3] では t 秒, x m, v が並んでいる。これは単純に、日本語の文章として体をなしていない、欠陥がある、と言えるのではないか。どれにもあらわれるカギ括弧つきの単位 [s], [m], [m/s] はどういう意味なのか、それが少しもわからない。唯一つの説明は [1] の、m/s は単位だというもののだが、これは真に受けていいものかどうか、 t 秒と l [m] を並べる感覚から見ると、確かに l [m] は l m（1 m の l 倍）のここのようでもある。しかし、[2] の s [m] では、その本体は s だけ、[m] は s が距離を m で測った数値であることの“覚え”としてそえられた仮のもので、オモテの“数式”のレベルでは s [m] と s は差がないようにも見える。

もっとも、 s [m] の s や、単に v と書いたときの v が数値だとしても、表層の数学的記述では量は数値でしか表わせないから（これは私の見解ではない！）そうになっているだけで、 s や v は数値の形をとった量そのものの記号である... 一言も説明しない著者にかわって、その心の動きをあれこれと勝手に想像して書くのも変な話ではある。 s [m], t , [s] のような特殊な表現が、全巻を通じて絶えず使われるのに、それについて何の説明もないというのが、教科書（文部省検定済！）というものの不思議なところであり、困ることでもあるのだ。

現実の 20 m という距離に対して s [m] という表現がどう係わるのか。（イ） $s = 20$,（ロ） s [m]（ハ） $s = 20$ [m]（ニ） s [m] = 20 m,（ホ） $s = 20$ m... このうち、どれが○どれが×でしょうか？ 学校の先生には、教えることがアイマイなわりに、正答か誤答かの区別だけは、いやにはっきりと決めている人が多いからウツカリできない。

説明がなくても例題がついていれば、あるい程度、著者が何を考えているか推測できるのだけれども... その例題が意外に少ない。この、速さの公式について、何とかその適用の仕方を示せる例は、三つの教科書のうち [1] だけにある。原文のままではないが（以下、「」でかこんでも必ずしも原文のままではない）次のようなものだ。

「車 A が時刻 t_1 に位置 $x_1 = 20\text{ m}$ にいたものが、 20 s 後の時刻 t_2 には、 $x_2 = 320\text{ m}$ の位置に達したとする。このときの A の速度を求めると

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{320 - 20}{20} = 15\text{ m/s}$$

となる。」

これを見ると、式の前の方で丸ゴトの量 20 m 、 320 m がそれぞれ x_1, x_2 と等号で結ばれているかと思うと、式の中では、 x_1, x_2 は m を除いたそれぞれ $20, 320$ に等しいように見える。同様に、 $t_2 - t_1 = 20\text{ s}$ かと思うと、式の中では $t_2 - t_1 = 20$ とされている。そのあとの計算は、おそらく $\frac{320-20}{20}$ が 15 (m/s) に等しいというより、それが 15 に等しいという計算をすまして、その結果に (m/s) をそえたのであろう。[m/s] は (m/s) でもよいらしい。

[3]の中から、別の公式についての例題をさがすと、

「ばねを x だけ伸ばしたとき、外力 f の大きさは、

$$f = kx$$

である。 k はばね定数といい、....」

という趣旨ののものがあ (これは速度のときの t 秒、 $x\text{ m}$ という文字の使い方とちがう)、これについて、

「質量 0.04 kg のおもりをつるしたら、 0.20 m 伸びてつりあった。.... このときばねの強さは、

$$k = \frac{0.04\text{ g}}{0.20} = 0.20\text{ gニュートン/m}$$

であり、...」

という数値例がある。 g については、少し前の自由落下のところ、 $g = 9.8\text{ m/s}^2$ という説明があり、

「落ちはじめてから t 秒後の速度を v とすれば $v = gt$ である」

と書いてある (丸ゴトの量 g と数値 t をどうやって掛ける?)。[3] でも計算は数値だけでやり、あとで単位 [ニュートン/m] をつけるということのようだ。式の中の g は 9.8 m/s^2 でなく 9.8 のつもりらしい。しかし、[1] も [3] も文字の扱い、等号の使い方、代入の仕方など代数の初歩的なルールといったものにまるで無感覚、ひたすらイカゲンというところがあり、これ以上、その様式を検討するのも無駄のような気がしてくる。

[2] はカギ括弧つき単位が多用されている。

「物体が力 $F[\text{N}]$ をうけて時間 $t[\text{s}]$ のあいだに力の向きに $s[\text{m}]$ 動くとき、物体にされる仕事 $W[\text{J}]$ は、 $W = Fs$ であるから、仕事率 $P[\text{W}]$ は、

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t}$$

となる」

という文章の例題として

「摩擦係数が 0.1 の水平な面上で、100 kg の物体を 20 s の間に等速度で 10 m 動かした...」

というのがあり、その回答は

「必要な力	$100[\text{kg}] \times 9.8[\text{N/kg}] \times 0.1 = 98[\text{N}]$
仕事	$98[\text{N}] \times 10[\text{m}] = 980[\text{J}]$
仕事率	$980[\text{J}] \div 20[\text{s}] = 49[\text{W}]$
(答え)	仕事 980 J, 仕事率 49 W

となっている。

こちらは、計算の途中でも全部 [] でつつんだ単位がついている。計算が終わった後で突然 [単位] をそえる [1], [3] よりは實際上、はるかにわかりやすい。ホンネ(?) どおり、カッコを捨ててしまうともっと簡単なのに、と思う。

結局、 $F[\text{N}]$, ts などの記号の説明はどこにもなかったのだが、これは中学校ですでに使われていて、あらためて説明の必要もない、ということなのだろうか？

3 中学校では

同じ「東京書籍」の中学校教科書 [4] を調べてみる。する t , やはり何の説明もない。最初の公式はみつどについてで

「... 密度は、物質の性質を表わすひとつの数値である。それをもとめるには、物質の質量を体積で割ればよい。その単位は g/cm^3 と表される。

$$\text{密度 } [\text{g}/\text{cm}^3] = \frac{\text{物質の質量 } [\text{g}]}{\text{物質の体積 } [\text{cm}^3]} \quad \text{」}$$

一瞬，“物質の質量”とは物理量そのもので，[g]をつけて数値（例えば 10）になるのかという気がしたが，これはむしろ反対で，“物質の質量”は 10 のような数値で，それに [g] をそえた 10g がホンネとしての物理量 10g に近いようである。

これも適用の仕方を示す例題はないが，別の，濃度の公式について

$$\frac{10[\text{g}]}{100[\text{g}] + 10[\text{g}]} \times 100 = 9.1[\%]$$

という例がある。これはマトモな計算におきかえると，

$$\text{濃度} = \frac{10\text{g}}{100\text{g} + 10\text{g}} = 0.091 = 9.1\%$$

となるところだ（9.1%とは 9.1 per cent つまり $\frac{9.1}{100}$ のことだ！）。

高校教科書とちがて，中学校では公式の中でも〔単位〕がつくのかと思うと，そうとも限らず，同じ教科書の下巻では

電力を $P[\text{W}]$ ，電流を $I[\text{A}]$ ，電圧を $E[\text{V}]$ とすると， $P = IE$ であるから

$$I = \frac{P}{E} = \frac{500[\text{W}]}{100[\text{V}]} = 5[\text{A}] \dots$$

と，高校教科書どおりである。

さきほどの○×式問題のうち，これまで例に引いた中で，すでに（イ）から（ホ）までの全部のタイプがあらわれたように思う。

結局， $s[\text{m}]$ とは本来，アイマイでいい加減な記号なのだ，これでは子供はわからなくなる。“秀才”は適当に調子を合わせていけるだろうし，物事をマトモに考える子でも，もし彼が強靭さをもっていれば，自己流の解決策で自衛できるだろうが，残りは“落ちこぼれ”となる。大新聞はこぞって（と言っても「朝日」以外のことはあまり知らないが），「教材を精選し，教科書を薄くすれば落ちこぼれが減る」ように書きたてているが，これは例によって多少アサハカなのであって，教科書を“読めばわかる”ようにキチンと書くという，ごくあたりまえのルールが守られていないことに真の問題があるのだ。それについては，いま問題にしている数学的形式＝語法の上の欠陥の他に，いろいろな別の要素もあるのだが，ここではそれに触れない。

4 マトモな教科書もある

実はあまりに異質なので，一緒に論ずることができず，後まわしになったが，高校教科書の中にも，物理量と数値との関係を正しく述べ，「つねに量の間の関係式」に

ついて考えているすぐれた教科書がある。それは「三省堂」[5]である。

「はじめに—物理学と物理量」と題した部分で、まず

$$\text{物理量} = \text{数値} \times \text{単位} \quad (\text{単位の数値倍})$$

であることを述べ、本文中の一つの項「量の間関係式」の中で例をあげて説明している：

2 cm, 3 cm の二辺をもつ長方形の

「面積 S は単位のとりかたによって

$$S = 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 20 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$$

とあらわされるが、 S は面積という物理量そのものをあらわし、単位のとり方に関係ない量であることがわかる。

一般に長方形の2辺の長さを a, b とし、面積 S としたとき、

$$S = ab$$

において、 a, b は 2 cm とか 20 mm という、単位まで含めた物理量をあらわし、単位の大きさに関係しない量である。したがって、上式はたんなる数値の間関係式ではなく、量の間関係式で、単位のとり方によらない式である。」

— このように説明している。さらに

「速さ v で、時間 t に距離 s だけ移動したときの関係式

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}$$

で、 s, v, t はそれぞれ物理量であって、上式はそれぞれ、

$$15 \text{ m} = 2 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s}, \quad \text{quad} \quad 3 \text{ m/s} = \frac{15 \text{ m}}{5 \text{ s}}$$

というようなことをあらわし、数値だけの関係をあらわしているのではない」と強調している。

この本は例題も多いが、例えば、質量 50 g の物体に 2 N の力が働いたときの加速度が何 cm/s^2 かという問題に対して、それを $x \text{ cm/s}^2$ とおいて

$$(50 \text{ g}) \cdot (x \text{ cm/s}^2) = 2 \text{ N}$$

$$x = \frac{2 \text{ N}}{50 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2} = \frac{2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{50 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2} = \frac{2}{50} \times 10^3 \times 10^2$$

$$= 4 \times 10^3$$

答え $4 \times 10^3 \text{ cm/s}^2$

というのがあ。もし加速度は何かという問題なら、普通はそれを x とおいて

$$x = \frac{2 \text{ N}}{50 \text{ g}} = \frac{2}{50} \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{g}} = \frac{2}{50} \times 10^3 \text{ m/s}^2 = 40 \text{ m/s}^2$$

と答えるところである。この本のやり方も他の場所では大体そうになっている。

私が調べた範囲では（買ったのが6種類、他に本屋での立ち読みがある。実は私は今まで、高校の物理の教科書をみたことがなかった）、“物理量の関係式”で通している本として、他に「実教出版」[6]がある。しかし、これには[5]のような、物理量と数値の関係について、その説明をする部分が全くない。「開隆堂」[7]はさらにアイマイだが、実際の計算例をみると[5]に近い。他に見た数冊はすべて[1]、[2]、[3]の同類のように思えた。

5 数学の本では

「数学」の教材では量の計算はどう扱われているだろうか。

高校の数学の教科書については、量ばなれ（齋藤さん流にいうと意味の捨象による数学の自立 [9]）が著しく、量の計算との関係であらためて言及する気も起こらない。

ちょっとおかしかったのは小学校の算数で（これは想像していた以上に量から離れているが）、ところどころに、

$$3 \times 24 = 72(\text{人}), \quad 200 + 15 \times 12 = 380(\text{円})$$

のような、[1]や[3]の計算法とおなじものとか（これは[11]の例）、

$$12^{\text{本}} \div 3 = 4^{\text{本}}, \quad 18^{\text{人}} \div 6^{\text{人}} = 3$$

のような、[2]の計算法に近いもの（これは[12]の例）があらわれる。

私の知っている限り、量の計算について最も重要な教材は、小学生のための本「わかるさんすう」全6巻[8]である。はじめに「わかるさんすう6」の旧版をみよう。

$$60 \text{ km/時} \times 3 \text{ 時} = 180 \text{ km}$$

のような量の計算の形式がこのシリーズの基本にあるのだが、この数値 60,3 にあたる部分を文字 a, b でおきかえた

$$a \text{ km/時} \times b \text{ 時} = ab \text{ km}$$

が導かれる。

「この場合の a は、速度を表わしているといっは正しくありません。速度の数値を表わすといわなければなりません。」

明らかに、ここでの文字は数値をあらわしているのだから、それをはっきり注意するのは大事なことだ。このように量ではなくて数値だけを文字であらわすことにすると、“等式”も自然に数値の等式が中心となる。例えば、円の面積の公式 $S = \pi r^2$ において S は、当然のことながら、[5] のような面積そのものでなく数値に過ぎない。

実は「わかるさんすう」には改訂版がでていて — 私はそれを知らずに、座談会 [9] でこの本への不満を口にしたのだが — 文字の使い方が多少かわり、「物や量や数を文字で表わす」ことになっている。そして $S = s \text{ km/時}$ のように、大文字で量を、小文字で数値を、と使い分けている。ついでに言うと、私の「線型代数」[10] では $x = \xi m$ のように、小文字とそれに対応するギリシャ文字を使いわけ、大文字 X は x の全体（の線型空間）を表わすのに使った。しかしラテン文字とギリシャ文字がキチンと対応しているわけではないから、それで通すのもむづかしい。もとにもどるが、改訂版も実際にはそれほど旧版と違うわけではなく、さきほどの面積の公式など（あまりはっきりしないが）旧版の扱いとかわらないように思える。

小学校の算数では、量を背景にするにせよ、（実）数の概念、その四則演算の規則そのものを確立するのが第一の課題である。そのためには、整合的な単位を固定して量が数値でおきかえられている状況を人工的であっても作っておく必要があるのだと思う。その意味では、数値を表わす文字の計算を中心にとするのは当然かも知れない。しかし、算数の教室を離れた社会の中の数学、たとえば物理の計算になると — 速度や密度や面積程度の単純な計算ならまだよいのだが — 量のそのものを文字で表わす公式でなければ、実際上使いものにならない。

「わかるさんすう」について、不満もまぜていろいろ書きたくなるのも（実はもう紙数がたりなくて書けないのだが）、元を正せば、長い間、私の子供と一緒にこの本に親しみ、強い影響を受け、唯一の便りとしてきたことからできている。その質の高さ（それは結局“よくわかる”ということだ）は「文部省検定教科書」とは比べものにならない。こういう本が国家によって公教育から排除されているのは日本の子供た

ちにとって不幸なことである（それは一種の暴力だ）。

文献表

- [1] 講談社 標準高等物理 I 改訂版（昭和 51 年改訂検定済）（大塚明郎，原島鮮他）
- [2] 東京書籍 新訂物理 I（昭和 50 年改訂検定済）（近角聡信他）
- [3] 第日本図書 改訂物理 I（昭和 51 年文部省改訂検定済）（戸田盛和他）
- [4] 東京書籍 新訂新しい科学第 1 分野上巻（昭和 49 年海底検定済）（茅誠司他）
- [5] 三省堂 物理 I 改訂版（昭和 51 年初版発行）（金原寿郎，和田八三久，中村純二）
- [6] 実教出版 物理 I 改訂版（昭和 51 年改訂版発行）（野上茂吉郎，今井功他）
- [7] 開隆堂 新編物理 I（昭和 50 年初版発行）（富永五郎他）
- [8] 「わかるさんすう」1～6。（6 の旧版は昭和 46 年，改訂版は昭和 49 年）（遠山啓，銀林浩他）むぎ書房
- [9] 「数学セミナー」1977 年 7 月号特集「線型代数を考える」（小島順，森毅，齋藤正彦の文章と三人の座談会）
- [10] 小島順「線型代数」日本放送出版協会（昭和 51 年）
- [11] 東京書籍 新訂新しい算数・6 下（彌永昌吉，小平邦彦他）（昭和 48 年）
- [12] 教育出版 新訂標準算数・3 上（河口商次，吉田耕作他）（昭和 42 年）

（こじま じゅん／早稲田大学）