量の計算と線型代数

小島順

数学セミナー1977年7月号

目次

概要

私の著書『線型代数』（日本放送出版協会）についての齋藤正彦氏の書評が“論争を呼ぶ本”と題して本誌 1976 年 9 月号にある．事前に会って話をし手紙をかわしたということがあって，この書評は“著者と評者の会話”（というよりケンカ？）の形をとっている．しかし，何分一ページの短い文章の中なので，何が議論の内容であるか，読者にはあまり伝わらなかったと思う．

齋藤氏は私の本について，「形式の極端な整備と意味の極端な重視の共存が一つの特徴」と言い，「一次元線型代数（量の理論）に長いページを割き，その枠で単位とか測定とかの意味を論じている」ことをまず取り上げ，疑問を出している．これについて私の言いたいことは，第一に，本全体の中で“一次元”の部分はそんなに長くはなく（全体の 10 分の 1 程度），この入り口の部分で拒否反応をおこすことなく先へ読み進んで欲しいということだが，やはり，どう考えても“一次元線型代数”は線型代数の第一歩なのだから，この点を強調しながら話を進めよう．

1　線型カテゴリー

線型代数とは，線型空間を obejct とし線型写像を morphism とするカテゴリー—線型カテゴリー—についての議論である（それについてのどういう理論かを言わぬと無内容だが）.

線型空間とは “ベクトル” の空間であって，和とスカラー倍という二つの演算を持ち，周知のような “線型空間の公理” を満たす．日常にあらわれる “量”，例えば時間というものを考えると，二つの時間を足すことができ，時間に実数を掛けることができる．しかし時間と時間を掛けることは（すくなくとも時間の全体という枠の中では）意味をもたない．したがって，時間の全体を X と書くとき，X の中での “四則演算” は存在しない．X は実数体 $\mathbb{R}$ のような体ではなく，では何かと言えば，“それは $\mathbb{R}$-係数の線型空間である” としか言いようがない．同じように，直線的な変位（移動した距離）の全体 Y は一つの線型空間を作る．日常的な意味での “空間” の変位の全体も線型空間である.

線型構造，つまり和とスカラー倍を保存する写像が線型写像で，こちらの方が（線型空間でなく）線型代数の主役，線型空間はその舞台（定義域，値域として）に過ぎないとも言える．X から Y への線型写像の全体は値域 Y での演算によって新しく線型空間となり，これを $L(X;Y)$ と書く．二つの線型写像 $X \xrightarrow{f} Y$ と $Y \xrightarrow{g} Z, Y \xrightarrow{gf} Z$ が定義され，$\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \xrightarrow{h} \cdot$ に対する結合律

1. $h(gf) = (hg)f$ と，単位に関する性質
2. $f1_X = f, \quad 1_Y f = f$ （$1_X, 1_Y$ は X, Y の恒等変換）が成り立つ．さらに，積が定める写像

$$L(Y;Z) \times L(X;Y) \longrightarrow L(X;Z); \quad (g,f) \longmapsto gf$$

は双線型である．言いかえると

3. $g(f+f') = gf + gf', \qquad (g+g')f = gf + g'f$ 　（分配律）
4. $(\lambda g)f = \lambda(gf) = g(\lambda f) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$ が成り立つ.

線型代数は，個々の線型写像を対象とするのではなく，上記の (i)–(iv) のような “演算規則” を満たすその総体，つまり線型のカテゴリーを対象とする.

2　基底・枠・次元

線型空間 X の部分集合 V が X の基底であるとは，X の任意の元が一意的に $x = \sum_{v\in V} \xi_v v$ のように，V の線型結合で書けることであった．V の濃度が X の次元である．例えば，文字 x の実係数多項式の全体は $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ を基底にもつ可算無限次元の線型空間である．“空間” の変位の線型空間 X では，v_1＝東への 1m, v_2＝北への 1m, v_3＝上への 1m として，$v_1, v_2, v_3 \cdots \in X$ が基底となり，X は 3 次元である : x が東へ ξ^1m，北へ ξ^2m，上へ ξ^3m の変位のとき，$x = \sum_{i=1}^{3} \xi^i v_i$ と書ける．このような時，順序を考えた組 $v_1, v_2, v_3 \in X^3 = X \times X \times X$ のことを基底と呼ぶことも多いが，ここでは区別して後者を枠（frame）と呼ぶことにしよう．一般に，$v = (v_1, v_2, v_3) \in X^n$ が X の枠であるとは，任意の $x \in X$ が一意的に $\sum_{i\in\bar{n}} \xi^i v_i$ と書けることである（$\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ とおいた）．$v \in X^n$ は $\mathbb{R}^n$ から X への線型写像

$$v_{\mathbb{R}^n} : \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \longmapsto \sum_{i\in\bar{n}} \xi^i v_i$$

を定めるが，明らかに

$$v \text{ が } X \text{ の枠} \iff v_{\mathbb{R}^n} \text{ が同型（線型双射）}$$

である（一応 v と区別して $v_{\mathbb{R}^n}$）を枠づけ（framing）と呼んでおく）．行列の記法では $v_{\mathbb{R}^n} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ となる（1 行 n 列の行列）．n-組 v が X の枠ならば X は n 次元である．最後に，X が時間の線型空間とすれば，v = 秒 = “過去から未来への 1 秒” を枠として，時間は $x = \xi$秒 と書け X は 1 次元である．小・中学校以来の各種の量というのは，それぞれが一次元線型空間を作る．

3　同型の概念

我々の “公理的・カテゴリー論的” アプローチでは，まず始めにたくさんの線型空間があり，さらにそれらから次々と新しい線型空間が作られていく．したがって，一方では，線型空間の間で同一視できるものを必要に応じて同一視するための，線型空間の同型の概念が不可欠である．その際，“標準的” ないし “自然な” 同型とそうでない同型には大きな違いがある．例えば線型空間 X と $L(\mathbb{R}; X)$ は標準的（canonical）

に同型で（$x \in X$ に $x_{\mathbb{R}}\colon \lambda \mapsto \lambda x$ を対応させ，$f \in L(\mathbb{R}; X)$ に $f \cdot 1$ を対応させる），さらに線型写像 $X \xrightarrow{f} Y$ に対して $L(\mathbb{R}; X) \xrightarrow{f_*} L(R; Y)$ が自明な方法で定まり functional である．（$(gf)_* = g_* f_*, (1_X)_* = 1_{L(\mathbb{R};X)}$）そして図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\simeq} & L(\mathbb{R}; X) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\big\downarrow \\ Y & \xrightarrow{\simeq} & L(\mathbb{R}; Y) \end{array}$$

が可換という意味で，この同型は**自然**（natural）である．このように，X と $L(\mathbb{R}; X)$ の同型は単に個々の X について言えるのではなく，線型カテゴリーの “全体” としてのものである．このことは functor（関手）$L(\mathbb{R};\ )$ が恒等関手と自然同型であると表現される．同様に，$v \mapsto v_{\mathbb{R}^n}$ は X^n と $L(\mathbb{R}^n; X)$ の自然同型を与える．我々はこのような二つのものを，せいぜい姿をかえただけの，“同じもの” と見なす．

これに対して，X とその**双対空間** $X^* = L(X; \mathbb{R})$ の関係を見ると，有限次元のときには確かに X と X^* は同型である．しかしそれは枠を指定することで得られる個別的偶然的なもので，カテゴリー全体での自然同型ではない．

X を n 次元とし，$v = (v_1, \dots, v_n)$ をその枠とするとき，逆写像 v^{-1} の第 i 行を v^i とおけば（正確には $(v^{-1})^i$）と書くべきだが，慣用に従う)，言いかえれば

$$v^{-1} = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

とおけば（n 行 1 列の行列），v^i は座標関数 $\sum_{i\in\bar{n}} \xi^i v_i \mapsto \xi^i$ のことで，このときの $(v^1, \dots, v^n)$ が v に双対な X^* の枠となる．$a \in X^*$ は $av_i = \alpha_i$ として，$a = \sum_{i\in\bar{n}} \alpha_i v^i$ とかける．特に X が 1 次元で，例えば時間の線型空間のとき，枠であるところの時間の単位　$\text{秒}\colon \xi \mapsto \xi\text{秒}$　の逆写像　$\text{秒}^{-1}\colon \xi\text{秒} \mapsto \xi$　が双対枠で，これは時間の**測度**，つまり時間を秒で測る操作ないしはその装置である “秒針”（1 秒に 1 目盛だけ進む）をあらわす．Y が長さの線型空間のとき，その枠 m（メートル）の双対枠 $\mathrm{m}^{-1}\colon \eta\,\mathrm{m} \mapsto \eta$ は長さを m で測る物差（モノサシ）である．

有限次元線型空間を object とし，同型を morphism とするカテゴリーにおいて，$X \xrightarrow{f} Y$ に f^{-1} の双対 $X^* \xrightarrow{(f^{-1})^*} Y^*$ を対応させると一つの functor が得られる．例えば自己同型 $X \xrightarrow{f} Y$ が $fv_j = \sum_{i\in\bar{n}} v_i p^i_j$ で与えられるとき，$(f^{-1})^* v^i = \sum_{i\in\bar{n}\ -1} p + j^i v_j$ となる（行列 p によ）り $fv = vp, (f^{-1})^* v^{-1} = p^{-1} v^{-1}$ と

書ける．）今，$fv = w = (w_1, \ldots, w_n)$ を X の新しい枠とみれば，$(f^{-1})^* v^i = w^i$ に対して $(w^1, \ldots, w^n)$ が w に双対な X^* の枠となる．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & c \in X \\ v\uparrow & \nearrow^{v} & v\uparrow \\ \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^n \ni \xi \end{array}$$

上の式 $(f^{-1})^* v^i = \sum {}^{-1}p^i_j v^j$ は新旧の座標の関係

$$x = \sum \xi^j v_i = \sum \bar{\xi}^i w_i \text{ のとき } \bar{\xi}^i = \sum {}^{-1}p^i_j \xi^j$$

を意味する．特に X が 1 次元ならば，新しい枠 $fv = vp = pv$（$p \in L(\mathbb{R};\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ は左から v に掛けることもできる）に対してその双対枠は $(f^{-1})^* v^{-1} = \frac{1}{p} v^{-1}$ となり，これは pv^{-1} と一致しない．つまり，$v \mapsto v^{-1}$ が定める同型 $X \to X^*$ に対して，図式

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{(f^{-1})^* = \frac{1}{p}} & X^* \\ v\uparrow & & v\uparrow \\ X & \xrightarrow{f=p} & X \end{array}$$

が可換でない（f と $(f^{-1})^*$ は互に反傾（contragradient）と呼ばれる）．例えば時間の 1 次元空間で，f: 秒 $\mapsto$ 60 秒 $=$ 分 とするとき，$(f^{-1})^*$: 秒$^{-1}$ $\mapsto$ 分$^{-1}$ $= \frac{1}{60}$ 秒$^{-1}$ となる．単位を 60 倍すると測定値は $\frac{1}{60}$ となる（時計の長針は秒針の $\frac{1}{60}$ の速さで動く）．このように（1 次元で言えば）量とその測度の “自然な” 同一視は不可能である．

一方，**再双対** $X^{**} = L(X^*;\mathbb{R})$ は（有限次元に限っての話だが）X と自然に同型である（再双対関手と恒等関手が自然同型）．1 次元の場合で言うと，X が長さの線型空間のとき，$x \in X$ を X^{**} の元と考えることは，cm を X の枠として，$\mathrm{cm}^{-1} \in X^*$ に対する値を考えることに他ならない：$x \cdot \mathrm{cm}^{-1} = \mathrm{cm}^{-1} \cdot x = \xi$ のとき $x = \xi\,\mathrm{cm}$．我々は日常的に長さとはモノサシ cm^{-1} で測った値 ξ で与えられるものとして扱っている．X を再双対 X^{**} でおきかえるのは，このような我々の日常的な態度そのものである．X と X^{**} の同一視で，双対とは言葉どおり X と X^* の対等な関係となる．

4　テンソル積

$a \in X^*, b \in Y^*$ のテンソル積 $ab \in L_2(X,Y;\mathbb{R})$（これは $X \times Y$ 上の双線型形式の空間）を，$(ab)(xy) = (ax)(by)$ で定義する（正式の記号は $a \otimes b$ だが，少し大ゲサ過ぎるので $ab, a \cdot b$ などと書く）．これはごく普通の “値による積” に他ならな

い．$X \simeq X^{**}, Y \simeq Y^{**}$ だから，$x \in X, y \in Y$ のテンソル積 xy も同様に定義され，$x = \sum \xi^i v_i, y = \sum \eta^i w_j$ のとき $xy\colon (v^i, w^j) \mapsto (v^i x)\,(w^j y) - \xi^i \eta^j$ できまる．つまり xy は枠を指定する度に，座標の積の系 $(\xi^i \eta^j)_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}}$ できまる．$L_2(X^*, Y^*; \mathbb{R}) = X \otimes Y$ と書き，X と Y のテンソル積と呼ぶ．任意の $z \in X \otimes Y$ は，$z(v^i, w^j) = c^{ij}$ として一意的に $z = \sum_{i,j} c^{ij} v_i w_j$ と書ける（上の xy は $\sum \xi^i \eta^j v_i w_j$）．

1 次元の場合，二つの量 x, y の積にあらたに作ろうとすれば，それぞれを単位 v, w で測った測定値 ξ, η の積を考える—これが我々がふだんやっている方法なのだが，それは測度の対 (v^{-1}, w^{-1}) ごとに測定値の積 $\xi\eta$ を対応させるというテンソル積 xy の定義そのものである．$X = Y$ を長さの 1 次元空間とするとき，ヨコ $x = \xi\,\mathrm{m}$，タテ $y = \eta\,\mathrm{m}$ という長方形の形（カタチ）は 2 次元空間 $X \times Y$ の元 (x, y) で示され，その面積は 1 次元空間 $X \otimes Y$ の元 $xy = \xi\eta\,\mathrm{m}^2$ で示される（m^2 はテンソル積 $\mathrm{m} \otimes \mathrm{m}$）．

面積の　座標 = 測定値　は

$$
\begin{aligned}
\gamma\,\mathrm{m}^2 &= \gamma(10^2\,\mathrm{cm})^2 = 10^4 \gamma\,\mathrm{cm}^2 \\
&= \gamma\left(\frac{1}{1.818}\,\text{間}\right)^2 = \frac{\gamma}{3.306}\,\text{坪}
\end{aligned}
$$

のように，単位の取替について 2 段階的である．

線型写像もテンソル積であらわされる．実際

$$
\begin{aligned}
L(X; Y &= L(X; L(Y^*; \mathbb{R})) \\
&= L_2(Y^*, X; \mathbb{R}) = Y \otimes X^*
\end{aligned}
$$

となる．線型写像 $f\colon X \to Y$ は $T \otimes X^*$ の元として $f = \sum_{i,j} f^i_j w_i v^j$ と書ける．ただし $f^i_j = w^i f v_j$ とする．座標の動きは X の枠の取替について共変的，Y のそれについて反変的である．X が時間，Y が長さの線型空間のとき，$L(X; Y) = Y \otimes X^*$ は $\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1}$ を枠にもつ 1 次元空間で，その元は一つの等速運動ないしはその速度である．この場合のテンソル積 $\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1}$ は $X \xrightarrow{\text{秒}^{-1}} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{m}} Y$ の合成と一致し，単位 秒 を単位 m に移す．普通の

$$
\text{速度} \times \text{時間} = \text{距離}
$$

という計算：$(\gamma\,\mathrm{m}\text{秒})\,(\xi\,\text{秒}) = \gamma\xi\,\mathrm{m}$ が成り立つ（X が 1 次元のときの同型（縮約）$(Y \otimes X^*) \otimes X \simeq Y$ によって左辺の積は本来のものともテンソル積とも自由に解釈できる）．

双線型写像 $(x,y) \mapsto x \otimes y$ は一つの "普遍問題" の解として特徴付けられる：任意の Z と任意の双線型写像 $\varphi\colon X \times Y \to Z$ に対して $\varphi(x,y) = \psi(x \otimes y)$ なる線型写像 $\psi\colon X \otimes Y \to Z$ が唯一つ存在する．小・中学校の言葉では，複比例とは積に比例することだ．こうして双線型写像は線型写像でおきかえられ，

$$\begin{aligned} L_2(X,Y;Z) &\simeq L(X \otimes Y; Z) \\ &= Z \otimes (X \otimes Y)^* = Z \otimes X^* \otimes Y^* \end{aligned}$$

となる．また例をあげると，X,Y,Z をそれぞれ電力，時間，金融の 1 次元空間とし，kW，時，円をそれぞれの単位とするとき，電気料金の一番単純で大ザッパなモデルとしての双線型写像 $\varphi\colon X \times Y \to Z$ は，$\varphi(\mathrm{kW}, \text{時}) = \gamma\,\text{円}$ として，$\varphi = \gamma\,\text{円} \cdot \mathrm{kW}^{-1} \cdot \text{時}^{-1}$ となり，

$$\begin{aligned} &(\gamma\,\text{円} \cdot \mathrm{kW}^{-1} \cdot \text{時間}^{-1})\,(\xi\,\mathrm{kW}, \eta\,\text{時}) \\ &\qquad = \gamma\,\text{円}(\mathrm{kW} \cdot \text{時})^{-1}\,(\xi\eta\,\mathrm{kW} \cdot \text{時}) = \gamma\xi\eta\,\text{円} \end{aligned}$$

となる．料金は電気使用量 $\xi\eta\,\mathrm{kW} \cdot \text{時}$ に比例する．

同じタイプのテンソルの例として "加速度" にふれておこう．T を "時刻" のアフィン空間，X を "直線上の位置" のアフィン空間とする．運動 $t \mapsto f(t)$ の速度 $f'(x_0)$ は $L(\vec{T};\vec{X})$ の元，加速度 $f''(x_0)$ は $t \mapsto f'(t); T \to L(\vec{T};\vec{X})$ の速度だから $L(\vec{T}; L(\vec{T};\vec{X})) = L_2(\vec{T},\vec{T};\vec{X}) = \vec{X} \otimes \vec{T}^* \otimes \vec{T}^*$ の元で，これが $a\,\mathrm{m}\,\text{秒}^{-2}$ の形をしているのは当然である．

5　一応のまとめ

量の計算—我々が日常の生活で計算しているその仕方，あるいはその際の意識のようなものをそのまま，全面的にとらえようとすれば，どうしてもそれなりの形式が必要である．量の計算の実際は常に "単位つき計算" であって，実数の四則演算はその部分的な断面に過ぎない．その数学的形式を整備する第一歩は，これまで見てきたように，"公理主義" の立場をとることであった．量がそれぞれ独自の線型空間を作る．公理による線型空間の定義は抽象的だが，抽象的だからこそ個々の具体的なものに直接適用できるのである（あたりまえのことだが）．第二は "カテゴリー主義" で，量の計算というものを個々の線型空間の中の演算としてでなく（もちろんそれもあるが），

カテゴリー全体の中の写像の合成やテンソル積として理解することであった．その際，自然同型なものをこだわりなく同一視する態度が重要だということも強調してきた．rigid（厳格）であることよりも flexible（柔軟）であることを！ というわけである．

齋藤氏は書評の中で「現在ある数学の，たとえばブルバキ風の形式化に全面的によりかかるのも問題だ」と書いているが，私はむしろ，現代ふうの線型代数が（そして現代ふうのものだけが）日常の計算の構造とうまく重なるという事実をおもしろいと思う．[1)]

線型代数が多次元の問題を主な対象とするというのはその通りであるが，それを一つのモノにまとめて扱うところに線型代数の核心があるのであり，この方向を徹底させると，おのずと 1 次元と共通の形でという部分が多くなる．そうすると，よく知っている 1 次元の話の拡張ということで多次元の双対性やテンソルの理解がたすけられる．そのためにも，一方で 1 次元の部分を調べ直しておくことが要求されるわけである．

6　直積と行列

二つの線型空間の直性（直和）は二重の“普遍問題”の解である．まず，任意の $X \xrightarrow{f^1} Y_1, X \xrightarrow{f^2} Y_2$ に対して $X \xrightarrow{f} Y_1 \otimes Y_2$ で $\pi^i f = f^i$ $(i = 1, 2)$ となるものが唯一つ存在し，$f = (f^1, f^2)$ あるいは $\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}$ と書く．任意の $X_1 \xrightarrow{f^1} Y, X_2 \xrightarrow{f^2} Y$ に対し，$X_1 \times X_2 \xrightarrow{f} Y$ で $f\rho_j = f_j$ $(j = 1, 2)$ となるものが唯一つ存在し，これを $f = [f_1\ f_2]$ と書く．より一般に，直積から直積への $X_1 \times X_2 \xrightarrow{f} Y_1 \times Y_2$ は $f^i_j = \pi^i f \rho_j \colon X_j \to Y_i$ によって

$$\begin{bmatrix} f^1_1 & f^1_2 \\ f^2_1 & f^2_2 \end{bmatrix}$$

と“行列表示”される．ただし $\pi^i \colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$ は射影，$\rho_j \colon X_j \to X_1 \times X_2$ は標準単射とする．行列の説明としてよくでてくる

1）『現代数学』1976 年 12 月号の全体としては大変好意的な「書評」で小林道正氏は“量の理論”にとって「線型代数がとりわけ重要なわけではなかろう」と書いている．私は「とりわけ重要だ」と思うが，“量の理論”の全体にはまだ別の側面がいろいろあるのも事実である．

	砂　糖	牛　乳
単価	a_1^1 ¥/gr	a_2^1 ¥/ℓ
カロリー	$a_2^1\,\mathrm{cal/gr}$	$a_2^2\,\mathrm{cal}/\ell$

のような表も，我々の立場ではそのまま（単位つきのまま）数学にとりこむことができる．

X_1, X_2, Y_1, Y_2 をすべて $\mathbb{R}$ でおきかえ，さらに 2 を一般の n, m でおきかえると，線型写像 $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ の行列表示

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^m & \cdots & f_n^m \end{bmatrix}$$

が得られる．これは "f をあらわす行列" などといちいち言わず，"行列の形に書かれた f そのもの" と扱った方がずっと簡単である．行列の積は線型写像としての積（合成）と一致し，"行列算" の体系は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 0)$ のすべてとその間の線型写像の全体のカテゴリーの議論と重なる．X が n 次元，Y が m 次元のとき，線型写像 $f = \sum_{(i,j)} \in \bar{m} \times \bar{n} f_j^i v_i v^j \in Y \otimes X^*$ は枠 v, w に関して行列

$$\begin{bmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^m & \cdots & f_n^m \end{bmatrix}$$

で表される．言いかえれば

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle v}\big\uparrow & & {\scriptstyle w}\big\uparrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

が可換である．

すでに見たように，テンソル積 $X \otimes Y$ の元は座標の二重添数族 $(c^{ij}) \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{m}}$ であらわされ，同様に双線型形式，つまり $L_2(X, Y; \mathbb{R}) = X^* \otimes Y^*$ の元も $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{m}}$ であらわされる．これらの二つの二重添数族は成分をタテ・ヨコに配列するやり方を約束すれば "表" となり，それは広い意味での行列と言える．しかし線型代数の中では，行列が "行列算" を離れたタダの表であっては役に立たないわけで，事実，これら線型写像以外のものの議論で行列の計算が使われるとき，その行レウはやはり

$L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ の元として働いている．例えば二次形式の固有値問題では，内積の存在を前提として，二次形式が対称変換におきかえられている．齋藤氏は，“表” ではテンソルの型がむしできることを「大利点」の一つにあげているが，私はテンソルの型の違いのような基本的なものが無視されるかだ “表” ではダメだと言っているのである．

7　おわりに

これまでに述べたことは線型代数の入口の部分だけで（入口でとまるなと書き始めたのに），その内容というか到達すべき目標のようなものには全くふれなかった．それは

1. 線型写像の標準化
2. 線型変換の標準化（固有値問題）
3. 二次形式の話
4. 内積空間での話

などで，一つ一つについて言いたいことがあるが，本誌 1975 年 5 月号「大学の数学を展望しよう」（足立恒雄・小島順・廣瀬健）にも多少書いてある．詳しくは私の本『線型代数』を！

最後に注意しておきたいことは，普通に量と言われるもの（線型空間の元，つまりベクトル）の他に，“時刻”，“空間での位置”，“高さ”，電位，温度などアフィン空間の元，つまり “点” と考えられるものがあるということで，アフィン空間はそれ独自の演算をもち，それが例えば速度と温度の計算の仕方の違いにあらわれている．

（こじま　じゅん／早稲田大学）