うだ」と言う子が結構いるわけね．

江沢　そこで子供が m をつけないで「$\frac{1}{4}$」と言ったら正しかったわけですか．

森　それは正しくはないですけどね．

江沢　正しくないけど，かなり正しいですね．

森　かなり正しいというよりは，仮に間違いであるとするというなら，問題に仕掛けがあって，「何 m か」と聞かれたにもかかわらず「$\frac{1}{4}$」と答えたということになる．

江沢　「切ったらどうなりますか」ならいいけど？

森　そう．そして「何 m か」という問題の意味を正しく取らなかったと言えば言える．

江沢　そういう間違いですね．

森　その場合にそうかどうかは分からないが，その可能性もある．

江沢　そこのところを，逆に先生が聞き間違えたということはないんですかね．

森　そうではないんです．

小島　それ，有名な話でしょう？

森　有名な話です．

高橋　ぼく，もう一つ疑問に思うのは，先生が「それでいいか」と念を押したのに依然として子供が「$\frac{1}{4}$m」と答えたといっても，子供が本当にそう思っているかどうかは疑問だと思うの．子供というのは，いったん言い出したら，どうしようもなく言い張るものですから．（笑）

江沢　同じ聞き方をしないで，先生が「それを四つ繋いでみろ」と言えばいいんじゃないのかなあ．

高橋　ええ，そうやって問題転換をしたほうがいいですね．

江沢　それで解決しちゃうんじゃないかと思うけど．

森　その変形はいろいろあるんです．よく数直線上に目盛りを打つでしょ．あのときに若干意地悪をして，0, 1, 2, 3 と書いておき「$\frac{2}{3}$ のところに目盛りを打て」と言うと，2 のところに打つ子が結構いる．

江沢　ああ，それはうちの子供がいま小学校なんですが，子供の持ってくる問題の言い表わし方が非常にまずいですよ．いかようにも意味がとれる．だから今の 3 でも，$\frac{2}{3}$ と言われたときに，$\frac{2}{3}$ という数のところに印をつけろと言われたのか，3 まで書いてある，それの $\frac{2}{3}$ と言われたのか，子供に分からないような表現で先生が問題を出した可能性がある．

森　いや，今の場合は意識的に $\frac{2}{3}$ の数ということを考えたんでしょうが，そういうのがいいかどうか分からないんだけれども，わざわざ欠陥を出さそうとしてやるとそれが起こるのだから……．

江沢　それを子供が勘違いした可能性もあるわけですね．ともかく問題の言い表わし方が非常に悪いということは感じますね．

●重さの加法性の分かり方

小島　それとよくある例ですが，子供がこんなに加法性を理解していないというのがありましてね．水に木ぎれを浮かべる，水に魚が泳いでいる，といくつか並べて，

それぞれの場合に，重さが二つの和になるかどうかを子供にきく．すると子供はどうだろうかと迷いますね．それを捉えて，ほらこんなふうに子供は加法性を理解していないというのですが，やっぱりそれはちょっと変だと思う．あんな複雑なこと，ぼく自身分からないです．江沢さんに笑われるかもしれないけれども，水に木を浮かべてどうなるかというのは分からないですね．実際に大気の中で水に木を浮かべて重さがどうなるかというのは，かなり難しい問題であるし，それと形式的な質量の和の演算というのは，一応区別すべきだと思うんです．

江沢　それより，ああいう問題を出すべきじゃないと言ったほうがいいんじゃないですか．

小島　理科のそれなりの状況の中で出すならいいですけれどもね．

江沢　それならいいですが……．

小島　あれは，分かっている，分かっていないというようなことではないと思います．

森　それに関連するかどうか分からないけど，結構難しくてやりにくいものに，小学校でやる溶解にからむ問題があります．水に塩を入れるやつね．あれは非常に怪しいんです．

江沢　理解が怪しいということ？

森　そう．算数の上ではそうなるけれども，実際にはそうなっていないと思っている子がいます．

齋藤　ぼくだって怪しいなあ．（笑）

小島　何が？　塩を入れて怪しい？　そうかね．

森　こういう話があるんです．実際に加法性についてやった先生がいるんです．はじめ子供に聞いたら和にはならないという．ところが，実際にやってみるとなるわけです．

江沢　溶かす場合ですね．

森　そうしたら，そのとき，子供が「ウソや，インチキや」と言った．

小島　なったので？

森　なったのに信用しない．そこでこれをどうしたらいいか，というわけね．それはやっぱり不思議なことであるんです．ところが，そこのところで，元来，自然は加法性があるのだから，加法性があるという自然の真理の前には何人も拝跪せねばならない（笑），という立場はよくないというのがぼくの説なんです．それは全然つまらない．やっぱり「けったいやなあ」というのでいいんじゃないか．「しかし，そうなっとるな」ということですよ．

それから板倉聖宣説もある．彼はそれについていくつか論じていまして，原子論ですね．つまり，形が変わったり，見えなくなったりしても，塩の粒と水の粒というのは何となくあるんだ．そう思うと，一応それが和になってもよかろうと思えるだろう．なるほどそういう考え方をしておくと，何となく納得しやすいな，というのでいいんじゃないかというわけ．しかし，それを水と塩でいきなりやるのは無謀である．なぜなら空想力を働かせる余地がない，というわけです．米粒 100 g に小豆 10 g とい

うふうな，一種のシミュレーションがないと無理じゃないかというわけですね．それは了解のレベルの問題であって，加法性が真理のレベルで論議されすぎるのが，問題だと思うんです．

ただ，実際にいろいろな経験をしてみる．たとえば生きているコイを計ったりするわけです．

江沢　コイは跳ねたりするんでねえ．(笑)

森　それでも大体いけるんです．もちろんややこしいと言えばややこしいですがね．でも，そういうのは漠然とした話でいいんで，いろんな場合でもそうなっとるんだというので，きわめて難しい異質な状況まで含めて加法性が成り立っているというのは，ある種の加法性に対する安定感覚を持つことは事実です．

江沢　それはそうだと思います．

森　ただ，それを何が何でも全部やればいいかというと，ちょっと分からないんですが，一つの目安になりうることは，子供がそれに乗り，それによって，たとえば重さの加法性に対する安定性とうまく同調するかどうかという問題だと思う．大体それが乗るんですよ．

江沢　そうだと思いますよ．ただ，その乗った場合に，あとでテストをしたりするわけでしょ．テストしたりするときは，例えばコイの問題は入れないとか，そういう配慮が必要だと思うんです．

森　そりゃあ，あんなものはテストしたってつまらんですからね．

江沢　印象づけるためにやる面白い問題というのはありますが，それは単に面白ければよいのであって，そこまでよく分かりましたかと言ってテストをするのは間違っていると思うんです．

小島　コイだと振れるわけでしょ，針が．だから重さが増すようにも見える．

江沢　魚が跳ねる，泳ぐと重さが増すだろうと考える子供は，質量の加法性などというお題目を唱える先生よりはるかに偉い……．

もう一ついえば，森さんなんかがいろいろお書きになると，現場の先生は，そうでなければいけないという格好で受け止める場合もあるということじゃないかな．

森　いや，そうでもない．ぼくはあまり……．

高橋　ありますねぇ．

江沢　ありそうだなあ．

森　ぼくはわりかたそこを意識して……．でもぼく自身の経験でもありますよ．

齋藤　森さんの意図いかんにかかわらず一定の効果はあって，やっぱり功罪の罪もかなりあるわけで……．

森　あるある．しかしぼくは少し居直っていて，大体ものを書いて，功だけしようなんて図々しい．ただ，そういうことは意識しなきゃいけないし……．

●田村理論をめぐって

齋藤　もう二つやりたいことがあるんです．一つは，小島理論の功績に，もう一つ，線型量，アフィン量という言葉を導入したことがあると思うんです．また数教協論議になりますけど（笑），速度と温度が同じように扱われている段階と小島理論と比べたら，全くニュートン以前と今ぐらいに違う，立派なものだとぼくは思うんだけどね．

森　確かにその問題がありまして，そのことが意識されていなかったわけではないんです．ただ，温度が内包量でうんぬんというのは，さっきの第二性質というと温度がすぐ出てくるという程度に扱われているわけです．そこのところは常に教条化する危険があるわけですね．

齋藤　田村さんは，アフィン量は量の中に入れていませんね．[1]

小島　田村さんのユークリッド式量，対称量の中には，直線上の「位置」とか，日常的な温度とかは入らない．田村さんが列挙された中には見あたらないが，絶対温度という形なら温度も量だろうし，温度変化の方を量，つまり本来の量として扱うことも許されるかも知れない．

森　ぼくは昔からわりあい小島さんに近いんです．この論点はまだあまり出ていないんだけれども，ぼくが田村さんの理論でちょっと気になるのは，倍という問題にかかわるんだが，数というのが自立しているとして，実数はあるとしてやるというわけでしょう．

齋藤　いや，それは小島さんでしょ．

森　田村さんの場合だって，実質的には実数を作るわけでしょ．

齋藤　ウン，作るんです．

森　実数を作るところの議論ですが，数学のほうで言うと，ぼくはもうちょっと欲がある．ああいう実数を作るんじゃなくて，ブルバキのワン・パラメーター・グループというのがあるでしょ．『位相』のどこかに．つまり，アルキメデス的順序群，すなわち順序構造から実数を決めてしまうもので，あの原理とある意味では本質的に近いわけです．

齋藤　そうです．

森　ところが，それと同じ原理というのは数学ではいくつかあって，たとえばハール測度の存在です．ハール測度の構成というのは，ある意味ではその原理を応用したものです．ノイマンなんかは，ほかにもいろいろなところで，同じようなことをしている．ぼくには，そちらへ引っかかる方向でないと，数学としても面白くない，という夢がある．田村流に実数を作っても面白くないし，趣味的に作ってみただけという感じがぼくにはする．

江沢　まさにそういう感じがするなあ．

森　そして，それ自体はほとんど教育にかかわりないという感じがする．

齋藤　田村さんは教育とは無関係にやったと言っています．

江沢　書いた方はそうかもしれないけれども，あまりよく知らない人があれを読んで，量というのは，このくらいのことをした上でなければ分かってはいけないものだと思うと困りますね．ああいうふうに麗々しく本を出されると，そういう効果もある

1）田村二郎『量と数の理論』日本評論社．

んじゃないかと思いますけどね.

森 それより，ぼくがちょっと困る気がするのは，小島さんが議論しているレベルの問題は，量の持っている線型空間的構造の部分が多いわけです．線型空間的構造の部分はね…….

齋藤 必ずしも実数でなくてもよいということですか.

森 実数化するうんぬんは別として，実数と無関係でいいと思う．それ自身はいいことだと思うし，今のアフィンと線型空間ということだって，そういうことは一応無関係にいいことだと思う.

ところが，田村さんの出している問題というのは違って，いわば実数を取り出す問題でしょう？

高橋 ちょっと工学の立場から言わせていただきますと，私どもは量と数との区別と関連が一応分かっている人を前提にして述べたり書いたりしていくわけです．しかし実際にその関係を定式化してみせたいという気持ちはある．田村さんは量から出発して数を作ってくれた．これはユードクソス以来のひとつの伝統であるし，南雲さんも立派な論文を書いていて[1)]，ほとんど同じ趣旨だとは思いますが，ぼくはありがたいという感じがします.

森 ぼくはあれも，不満なんだなあ.

小島 ぼくは田村さんの『量と数の理論』は，論ずるとすれば当然ああなるべきもので，それほど変わったことではないし，量と数とを一緒に小さな子供に教えようとすれば，結局ああいう内容になるほかないような気がするんです.

高橋 あれを踏まえて現場の先生がうまく教案を組むってことだって，できないことではないと思うんですが…….

小島 ああいう方法というのは，もちろん内容の意味で，あの本で子供に教えるということではないんですよ．田村さんのが趣味的で，教育にかかわりがないというのは，やはり違うので，量や数の捉え方に対立があるから問題になるのだと思う.

森 ぼくがそれに対して危惧するのは，論理的には量と数と違うに決まっているけれども，量・数ダブリ論みたいなところがあるわけで，実数というもののイメージが形成される過程というのは，さっきの線型空間的な構造を含めて，数の現象する全体みたいなものから数が作られていくというふうなイメージがある．だから，論理的に数が作られているところで事足りるとして「数はすでに分かりました」という態度はよくないんじゃないかと思う.

小島 田村さんは一つの量の全体の中で実数を作っているわけですが，森さんが言われているのは，それではダメで，異種の量との掛け算とか割り算とか，そういう全体の中で実数ができるんだということですね.

森 ウン.

● am の a は量か数か

高橋 田村さんもまた教育現場というものを踏まえて発想しているんでしてね．ぼくも小島さんも田村さんもおそらく共通に関心を持っていることがあると思います．たとえば 2m という量があるとき，m が長さの1次元線形空間の基底で，2 が体から取ってくる係数である——そんなことを子供に言うわけにいかないけれども，そういう共通の了解があると思います.

いま文字を使って長さを a と書いたとします．そのとき，a は数なのか量なのかということは，見る人によっては問題でしょうね．小島さんのはあとでご本人に言ってもらうことにして，ぼくは a 自体が量なんで $a=(a)$m なんです．ここで (a) は長さ a を単位量 m で測ったときの数を表わしています．ただしこれは了解事項であって，いちいち標記するわけではありませんけれど，一応ことわっておかないと初めて文字式に出会ったとき，読者は困るんじゃないかと思いますけどね.

江沢 どっちかに決めないとどういうふうに困るんですか.

高橋 がんらい単位に無関係の式に単位付き数値を入れて実際に計算をするときに，どういうふうに単位を表わしていくかということで…….

江沢 だって単位は m のほうに入っているんじゃないですか．a が量であるか数であるかによって計算の仕方が違ってきますか.

高橋 単位の約束がはっきりしていて，計算の形式に問題を限定してよろしければ違いはありません．文部省の検定官も数値の計算式に単位を記入する流儀を A 条件で毛嫌いするそうです.

江沢 違わないなら構わないじゃないですか.

小島 (a)m とおっしゃるときには，m の (a) 倍ということでもあるけど，高橋さんのは m が〔 〕に入っていて，長さが a で，断り書きとして「測るときは m で測るよ」ということですね.

江沢 どっちでもいいじゃないかと言われたら，どうします？

高橋 もともと単位に無関係に成立する体系中の文字式に，親切心から注意書きとして〔m〕を書くだけのことですから，学習者が声をそろえて，どっちでもいいと言ってくれるほどワケシリなら，それこそどっちでもいいんです．しかし実情としてはどうかな？

江沢 困らないんじゃないんですか.

高橋 なるほど．私も小島さんの挙げてくれた文献 [13] では，理工系学部における教育現場として，物理の文字式の文字が量か数かは問題にはならない（量の意識が定着してくる）という意味のことを書いたことはあるんです．しかしそのときにも初・中等教育で初めて量に文字をあてがうとき，約束なしでは無理じゃないかとは言い添えておいたのです.

江沢 無理に困っているという感じがしますけどね．数教協もそういうところがあると思うんだけれども，困らないでいいところを無理に困ってみせているでしょう.

齋藤 大賛成.（笑）

1) M. Nagumo: Quantities and Real Numbers, Osaka J. Math., 1977.