

法的になるって書いてあるでしょう？ 相対性理論に移ったから話が変わったのです。速さひとつとっても、一概に教条的には割り切れないところがありますね。

小島 その点はぼくはわりにちゃんと書いたつもりなんですけどね。

高橋 小島さんは形式化のレベルで捉えられているんだと思います。一見、話が飛んじゃっているように見えるんですが、そこが小島さんにとって大切なところだと私は思うんですよ。速度のところ「速さの代数的足し算は物体の合併と全然関係がないんじゃないか」というのが、小島さんの大切な主張点の一つだと思うんですよ。それだからこそ、 $\tanh \theta$  なんていうちょっと相対論気味なところで話が行ってしまっているわけで、記述法としては親切ではないとは思いますが……。

小島 ぼくは、量とはどういうものかということから始めたくないと書いたわけですが、現実の量について考えるということは、物理そのものについて考えることだし、それはいくらかでも奥行があるわけですね。物理の素人であるぼくらが分からないところまで達して、レベルが上がるごとに速さというものの捉え方も変わってくる。そういう点で謙虚であろうと実はしているんです。

ぼくが書いたのは、小学生のレベルで量を扱っている現実があり、大学の教養程度で量を扱うというレベルがあり、物理の専門家が量を扱っているというレベルがあるということなんです。そして、レベルが遠



さいとう・まさひこ

うし、内容も変わるけれども、それぞれが固有の様式を持っている。いかに低いレベルであっても、それなりの様式を持っている。それは言い換えると、数学的な構造がそれぞれにあるということなんです。だから、速さなどというものも、レベルごとに捉え方が変わってくると思うんです。

今の話について言うと、一つは数教協などで、量というのは物体に対してその諸側面を表わす数値が対応するものだという感じで捉えられていることが多いと思うんです。その場合に、物体の合併に対して加法的かどうかということでは量を区別するということがありますね。数教協ふうに言うと、速さは加法的でないというのだけれども、ぼくが言いたかったのは、物を合わせることに速さの代数的な足し算とはもともと直接の関係はない。二つの機関車を結合したときにどうこうということとは別に、速さの代数的な和というものはあるということなんです。

要するにそれは距離の和があるということとして、時速 40 km と時速 30 km で

あれば、その和は1時間に 30+40 で 70 km 走るという速度なんです、ある意味で物から離れた抽象的なレベルでの足し算なのです。実際に運動の合成というときにどうなるかはまた別の話であるし、特殊相対論で言えば例の公式で速度の合成がなされる。けれども、その際使われる足し算は普通の意味の代数的な足し算であるわけですね。ぼくはそういうことを書いたんです。

高橋 それはとてもいいことだと思うんですよ。物体の合併と関係ないという論証がガリレイの『新科学対話』にありまして、そこから近代力学が始まったと言っているくらいだと思います。それまでは物にすごく関係があるというかたちで考えられていたわけですね。

江沢 何ですか、その物体の合併に関係ないというのは、どういう話でしたっけ。

高橋 重い物体は速く落ちる、軽い物体は遅く落ちる本性をもつというアリストテレスの「自然学」がありましたね。ガリレイはその学説を代表する対話者シンプリチオ氏に向かって「その二つの物体を合併したらどうなるか」という意味のことを問うわけです。少し長くなりますけれど『新科学対話』（岩波文庫版、上）から引用しておきます。

「サルヴィアチ ではもし自然速度の異なる二つの物体をとって、二つを結び合せた場合、速い方の物体は遅い方の物体のために幾分かその速さを緩められ、遅い方は速い方のため幾分か速められるということがあるわけですね。こういう考えでは私と



たかはし・としえ

一致するでしょうか。

シンプリチオ まったく仰せの通りです。サルヴィアチ しかし、もしこれが本当だとし、そしてもし大きな石が例えば8の速さ、一方小さな方の石が4の速さで動くとすればその二つが結び合さったものは8より小さな速さで動くでしょう。ですが二つの石が結合されれば、その大きさは、以前8の速さで動いていた石よりも大となりますから、重い物体が軽い物体よりも速度が小であるという、貴方の仮説と全く相反する結果になります。」

こうした矛盾の指摘から速さは物体に内在する量ではないことをガリレイは相手に納得させてしまいます。これが速度の捉え方の近代科学における事始めみたいなものなので、その点小島さんはイイセン行っていると思うし……。

江沢 それは小島さんのおっしゃっていることと関係ありますか？

高橋 小島さんの文章にも、「速度というのが何か物体の“性能”のようなものとみなされているようだ」として、EL と SL

を結合する例を持ち出す発想そのものを批判しているところがあるでしょ。小島さんの趣旨を私なりにパラフレーズすれば、速度の足し算というやつも、ガリレイ変換を時間で微分すれば当然出てきちゃう。その前提になっているのは変位のつき足し可能性で、それがガリレイ変換に前提されているから、時間で微分すれば当然速度の合成則が出てきます。先ほどからレベルが違うということが盛んに言われているけれども、相対論だって手口としてはそれほど違ってない。ローレンツ変換を固有時間で微分すれば速度の合成則が出てきてしまう。

江沢 それは速度の定義を変えることですが……？

齋藤 無理解者として、間違っているかもしれないけれど、量の理論を自然現象の認識からいったん切り離すというのが、小島君の立場ではないかと思うんですよ。だから相対論を考えればそれに即したものだし、ニュートン力学の範囲内でいえば全く線型的な速度の和であるし、絶対零度を考えれば普通の量になる温度、そうでなければ小島さんの言うアフィン量ということになると、かなり丁寧に書いてあります。要するに、いままでゴツチャになっていたものを切り離して概念を整理することですね。そこだけでも非常にいいですよ。

高橋 その整理が実に見事なんですわね。

### ●外延量・内包量とは何か

森 今のことにも関係するんだけど、数教協の外延量・内包量というのは、ある



もり・つよし

程度教科書ふうになったやつでは、若干教条化する部分があるわけです。

齋藤 もうそこへ飛んだんですか。(笑)

江沢 いや、そこが小島理論の問題点なんです。

森 そのことと関係があるんですよ。つまり、外延量と内包量という話の起こりは、たぶんデカルトだと思うんですよ。遠山さんはデカルトが好きで、第一性質、第二性質というのがもともとのイメージとしてある。つまり、エクステント（広がり）としての量とインテンシティ（強さ）としての量で、それは哲学的な伝統としてあるわけです。ところが、これは小島さんに対する問題なだけけれども、ぼくは数教協の中ではもともとわりあい線型代数派なんです。線型代数のカテゴリーというのは今の数学では基本的なものとして作られてきたから、それを基にして理解すると、理解しやすい面がかなりある。

しかし、今の原型的なレベルで言うと、遠山さんは線型代数のカテゴリーでないと思うんです。強いていえば測度のカテゴリ

ーで、いわゆる測度の加法性というのが加法性の原型としてあって、その場合、インテンシティとしての内包量は、密度微分がむしろ表面に出てきている。

ところが一方では正比例の問題が出てくるわけで、正比例の定数になるような量を内包量と言っていいだろう、というようなことも遠山さんは言うわけです。抽象的な意味での加法性に対応しているのは、小島さん流にいうと線型代数のカテゴリーのレベルで、その場合には、内包量うんぬんというのはいわゆる正比例の定数になるというレベルになっていて、遠山さん自身、そういういくつかの層のことを適当にしゃべっているようなところがある。それが教科書なんかになると、「加法性のあるのは外延量で、ないのは内包量」というふうになってしまう。

速度の加法性に関してぼくが小島さんとちょっと違うのは、ある程度できた数学というよりは数学の作られ方みたいな感じがある。そこら辺があまり論理的でないところがあって（論理的でないというのは、卑下して言っているのではなく主張して言っているのですが）、直接的には感覚としての速さがあるけれども、小島さん流に言うとは、長さがあって、速度の空間  $V$  から長さの空間  $W$  への線型写像の全体  $L(V; W)$  みたいなものである。

ところが、その線型写像のほうに加法性を獲得するのは、レベルが違う。つまり、速度の比較というときに、直接的にあるの

は変速ではないとぼくは思う。感覚的には速くなったということがあるでしょう。ところが、等速運動というのが線型であるわけですね。二つの等速運動を比較するというのは、変形可能なような形で速度が比較されるのでなく、線型代数の場合でも、実際に作っていくときには、まず  $V$  とか  $W$  とかいう線型空間があり、その線型写像があって、その線型写像の全体  $L(V; W)$  に加法を新たに定義してみれば……とやっ、あとで見ればこれは双対的であったという感じになるんだと思う。感覚的には  $V$  の双対  $V^*$  と  $V$  が同時であっても、まず  $V$  という  $K$  上の線型空間があって、つぎに  $V$  から  $K$  への線型形式の全体  $V^*$  というのが作れて、 $V^*$  はまた線型空間になるというのが、最初の段階としては自然だね。  $V^*$  のほうも線型空間になり、逆に  $V$  のほうも  $V^*$  上の線型形式と思えて、両方が対等に思える段階というのはかなりあとのレベルなんで、そのときの、数学を作っていくレベルみたいなことが、ぼくは数学自身としても問題になると思うんです。

高橋 確かに生活感覚としてはそうだと思いますし、われわれが工学で実際に扱っている感覚もそうです。

それからもう一つ、さっきダメ押しするのを忘れたのですが、子供がガリレイ以前であって何が悪いかということがある。子供を相手にする場合、まず物を持ち出して物の速度というかたちで議論をし、二つの物の速度を足すということは案外大変だ

よ、というような言い方で教えていく。これは強いられたいも同然のことで、科学自体が紆余曲折した科学史を持っているのだからしかたがない。その点は小島さんにも教育運動としての数教協に、もうちょっと理解を示していただきたいという感じなんです。がね。(笑) 数教協が外延量というとき、単に加法的なんじゃなくて、加法的集合関数を意識しているように思われます。さっきの例でもガリレイは速度は足し算できないと言っているわけではなく、集合関数じゃないと部分否定していることになるでしょう。

江沢 いや、物理の量としての速度だったら、二つを加えるというときは、それなりの物理的状況を頭においているんです。そこを切り捨てて速度は加法的だなんて言っても意味ない。むしろ危険じゃないか？

速度の合成を要求する物理的状況というのは、相対論になっても相対論以前でも同じなんです。変わらない。量の演算は物理的状況とベアにして捉えなければいけない。速度というのは線型の量だと思っていたら、もうちょっと物理が進むと、話が変わってくる。にもかかわらず、それが相変わらず速度の合成則だというのは、物理的状況が同じだからです。

小島 (ぼくは速度が加法的だなんて言っていないし、「線型の量」とおっしゃるのが合成に対して加法的という意味なら、線型の量とも言っていない。それは「報告」の方を見ていただくとして) もともと数学というのはそういうもので、ほかの領

域で、あるレベルでやっていることの数学的なモデルを提供するわけですから……。

### ●速度の概念

江沢 そうなんです。でも、学者が自家用にそれをなさるのは結構だけれども、教育の場面にそれを持ってくるのは、どうも少し危険なのではないか。

小島 何のことを危険とおっしゃるのか、よく分からないが、実際は子供の感覚でいっても、ある速さの2倍の速さとか、時速30 km と時速40 km を足せば時速70 km というふうなことは、状況としてはむしろ加速する場合だろうが、わりに早くから掴まられていることだと思うんです。

江沢 それは「速度は加法的なのだから」と考えて足し算してるんじゃないかと、子供は、問題の物理的状況をイメージして、それで自然に足し算したくなるから足すということじゃないでしょうか？

小島 ぼくは「速度は加法的かどうか」という発想にもともと反対しているのだから、こんな批判をされても困るのだが、それは別として、数教協について不満なのは、速さが物の性能みたいなものになっていることです。時速30 km というのが時速30 km で動いているという状況でも何でもなくて、カタログに書いてある性能みたいな感じなんです。だから、時速30 km の機関車と40 km の機関車を連結するというようなことが平気で出てくるわけでしてね。違った速さで動いていれば連結できないと思うのだけれども。(笑) 30 km 出せるや

つと40 km 出せるやつを繋いで走らせると何キロ出せるか、という感じで議論されている。

江沢 そういうことが問題になる場合だってありますね。量の演算は物理的状況とベアにして掴まえないければいけないんです。

小島 普通に言うと、速さというのは現実には走っている速さなんでしてね。

高橋 ぼくは子供にそこを分かってもえれば文句はないという感じだな。文章題ではコトバに捕われてしまう危険性がある。

森 ガリレイやニュートンの時代と今の時代はもちろん違っていて、先ほど速度論議がありましたが、大体あのころの人は距離を時間で割らないでしょう？ 速度という概念自身が怪しいんです。

時間区間ごとの長さであったり、長さの比が時間の比になるとかいうのはありますが、きっちりした固定した量としての速度というのが多少怪しいところがある。ボホナーの『科学史における数学』<sup>1)</sup>という本をぼくはわりかた気に入っているんですが、あれは微積分の成立をホイヘンスに置いている。ホイヘンスは速度を微分するようになっているんです。ボホナーの解釈が適切かどうかは知りませんが、アリストテレスは、変化は考えてもいいが変化の変化というのは矛盾した概念であると言っている。そして、変化の変化というのは、ボホナーふうの解釈によれば加速度なんです。つまり、変わっていくのはいい、そこで速度めいたものが考えられるにしても、変わって行き方としての速度がまた変わるという概

念があるためには、速度の概念がきっちりしないと困る。だから、導関数をもっと昔からずいぶんあるけれども……、いや、導関数というのはまずいかな？

小島 微分係数はあるが……。

森 そう、微分係数はあるが、微分係数が関数としてまた微分できるようになったのはホイヘンスからだというわけですよ。そういうボホナーの解釈が正しいかどうか分かりませんが……。

高橋 ぼくもそう思いますよ。アリストテレスの頭にあったのは、円運動であっても等速ということで、それがギリシャ以来の最もピュアなパターンとして、近代科学の夜明け前まではたいへん尊重されていたと思います。

森 そうですね。

江沢 しかし、ニュートンの『プリンキピア』<sup>2)</sup>にはちゃんと遠心力のことが書いてありますよ。遠心力というのは加速度ですね。

森 ええ、だからニュートンのレベルでは完全になっているわけで……。

高橋 その前にホイヘンスがあるというボホナー説は、ぼくも多少科学史を調べてみてそう思いました。

森 だから、ふつうニュートンと言われているのを少しずらし気味にして、そのメルカマルに速度というものがひとつの量となったということだね。ニュートン自身

1) 村田全訳、みすず書房。

2) 河辺六男訳、「世界の名著」中央公論社。また中野猿人、訳講談社。