化されると，物体 $\longmapsto$ 実数　という“物体関数”となり，量とはこのようなものと理解されているらしい．物体の合併に対して加法性が成立たないのが内包量である．30°C の湯と 40°C の湯を混ぜても 70°C にならず，したがって温度は内包量である．速さ 80 km/時 の EL と 50 km/時 の SL を連結しても，130 km/時 の速度にならない．だから速度は内包量である．

このような議論は私にはあらゆる点で不思議なものに思える．温度については，$30°\mathrm{C}+40°\mathrm{C}=70°\mathrm{C}$ という計算自身が形式的にも意味をもたない．これは 0°C という人工的な原点で成立する偶然の演算だからだ．温度などアフィン的な量で意味をもつのは**荷重平均**の概念であって，$\lambda:\mu$（ただし$\lambda+\mu=1$）の比で湯を混ぜると（$\lambda\times 30+\mu\times 40$)°C となる．

これに対して，

$$80\ \mathrm{km/時}+50\ \mathrm{km/時}=130\ \mathrm{km/時}$$

ははっきりした意味をもっている．速度はもっともベクトルらしいベクトルの一つだからだ．

両者の数学的構造の違いが無視されて，このように並列されることが私には納得できない．物体 $\longmapsto$ 実数　という量規定では，かんじんの量代数（量の演算の構造）の部分が抜け落ちるのではないかと思う．後者の速度の例だと，速度というのが何か物体の“性能”のようなものとみなされているようだ．

速度の和とは，物体とは一応離れた抽象的レベルのものではないだろうか．“物体の連結”と無関係なのは当然だが，運動の合成（相対運動）を背景とするものでもない．たとえば光速度を c とするとき，$\frac{1}{2}c$ という速度二つの合成が $\frac{4}{5}c$ だが，c の $\frac{4}{5}$ 倍とは，人間にもともとそなわった抽象的な線型演算にもとづいているのである．

直線の**傾き**についても同じことが言える．0.1 の傾きと 0.2 の傾きの和は何か？　それは 10 の上に 3 が立つ傾き，すなわち 0.3 である．しかし l' が l

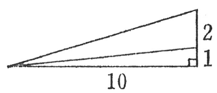


図 2

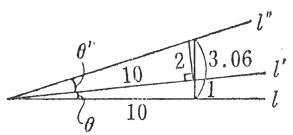


図 3

に対して 0.1, l'' が l' に関して 0.2 の傾きのとき，l'' が l に対して 0.3 の傾きをもつかと言えばそうでない．タンジェントの加法定理から，それは約 0.306 となる．合成に関して和が対応するような新しいパラメータとして傾きに対応する角をとると，角の和 $\theta+\theta'$ が傾きの合成に対応する．

速度は一種の傾きであるが，光速度という普遍的な速さを媒介に時間と長さが同一視され，直線運動の速度は幾何学的な傾きと同じく無次元の数となる．運動の合成が速度の和を導かないのは当然と言える．この場合，合成が和になるようなパラメータが $v=\tanh\theta$ となる θ である（双曲正接関数）．

以上，“物体関数”ふうな量のとらえ方に対する私の違和感のようなものを述べた．

最後に，銀林氏の内包量の分類（これは高橋 [4] の 209 ページ以下でも議論されている）に関連して少し意見を書いておく．それは y/x で，y が分布型，位差型，x が空間型，時間型と分類して，計 4 個の類型を考えるものである．

x ＼ y	分布型	位差型
空間型	密　度	勾　配
時間型	流　量	速　度

簡単のため空間というのは一つの直線としよう．この直線の上に“高さの分布”つまり一つの関数 f を考えるとその**勾配**は df であるが，長さの単位と直線の向きをきめると $df=f'd\xi$ の形になる．m を単位にとれば，$d\xi$ は点ごとに m^{-1} で表わされる変数である．数学の形式としては，勾配は本質的には 1 次の**微分形式**である．長さの単位をきめて得られる関数 f' は直線の向きを逆にすると符号を変える“奇種の関数”である．**密度**はこの直線上の“質量分布”を表現するもので，同じく長さの単位をきめると，密度関数 ρ を使って $\rho\, d\xi$ と書ける．この場合，向きを変えても ρ は変らず，言いかえると微分形式として符号を変える．これは奇種の微分形式あるいは積分論の**測度**であって，この点，どちらも直線上の分布であるが，勾配と密度は対比的である．密度分布は積分によって集合関数としての質量を定める．私の感じでは「集合関数としての質量」は，単なる質量よりは密度分布の方にずっと近い概念であ

る．

対比のため同じ直線上の流量を考える．銀林氏の趣旨からははずれるが，時間で割るという部分は無視する．流量（current）とは，直線上の各点で，その点を通過する質量が定まっていることだ．これは，向きをきめると通過量の正負がきまり，結局，流量とは**奇種の関数**である．これも銀林氏からはずれるが，速度も，直線上の定常的な流れ（flow）を考えると，この直線上のベクトルの分布つまり**ベクトル場**である．そして勾配がこの直線からの関数の微分であるのに対して，速度がこの直線への関数の微分であるという意味で，勾配と速度は双対的である．

「密度・勾配・流量・速度」という題を出されて，全員が同趣旨の作文をするとすれば，そのような情況はむしろ異常であろう．さまざまな立場からさまざまな議論が出た方がよい．私は，「普通の数学」でそれらが一体何であるか，という観点から少し書いた．

あまり長くなったので，この辺でやめよう．

[1] 田村二郎『量と数の理論』1978 年，日本評論社

[2] 田村二郎「量と数の理論」，『数学セミナー』1978 年 3 月～6 月

[3] 高橋利衛『基礎工学セミナー』1974 年，現代数学社

[4] 高橋利衛『図説基礎工学対話』1979 年，現代数学社

[5] 小島順『線型代数』1976 年，日本放送出版協会

[6] 小島順・森毅・齋藤正彦「特集／線型代数を考える」，『数学セミナー』1977 年 7 月

[7] 小島順「量の計算を見直す」，『数学セミナー』1977 年 8 月～1978 年 1 月

[8] 銀林浩「量の問題をめぐって／発生的立場からも考えよう」，『数学セミナー』1978 年 2 月

[9] 銀林浩『量の世界』1975 年，麦書房

[10] 森毅『数の現象学』1978 年，朝日新聞社

[11] 山崎圭次郎「数と量，移動と写像」，『数学セミナー』1978 年 5 月

[12] 遠山啓『教師のための数学入門／数量編』1960 年，国土社

[13] 高橋利衛「なぜキミマンはアンペアでなくてボルトなのか」，『Basic 数学』1979 年 7 月

（こじま じゅん）

●討論

量の理論

江沢 洋

小島 順

高橋利衛

森 毅

齋藤正彦 （司会）

●はじめに

齋藤 ぼくは量の理論の無理解者として雑誌に一度出たわけで[1]，今でもそのままなんです．ですから，何もちゃんとしたことが分かっていないので，お話を伺うというような感じでいきたいと思います．ただ，あまりにも考えていることがかけ離れているとまずいから，量の定義を「こういうものが量である」というかたちか，または「これこれが量である」というふうに列挙するかで，言いたい方は言っていただく．言いたくなければ，言いたくない理由を話していただきたい．（笑）

高橋 まず物理学者ですな．（笑）

江沢 いやいや．意見をお持ちの方からどうぞ．

高橋 ぼくは量の定義についてはネガティブな意見しかないから，そういう発問に対する応答はいちばん最後に回してください．まずポジティブに期待できるのは江沢さんじゃないかな．あるいは森さんかも分からない――とにかく数教協[2]なんだから……一応は．

森 数教協だというのが困るんだな，大体．つまり，数教協という立場であんまりしゃべりたくないということなんだ．数教協批判を言われたら数教協として言わんと

1) 小島順・齋藤正彦・森毅「特集／線型代数を考える」『数学セミナー』1977 年 7 月号．

2) 数学教育協議会：1951 年，遠山啓などにより，文部省の数学教育政策を批判することから生まれた，数学教育研究団体．1957 年ごろから，量を基礎にした数学教育で，現場の授業を中心に，実績をあげている．

いかんのだけど，そういうことをやると堅苦しくなって，面白くなかろうという感じがあるし，かつ今ごろそういう種類のことをがたがたしたくはない．

それから，数教協というけれども，遠山さんと銀林さんとぼくの三人にしても，多分かなり違うんだ．外から見るほどはきっちりしていないんじゃないかという感じなんです．

話を大袈裟なほうにできるだけ拡散すれば，数学に対する感じ方の問題とかかわっていると思うんです．ぼくはあんまり数学を信用していないところがあって，あまり数学者として振舞いたくない感じなんだ．どう言ったらいいのかなあ……．こういう感じのことなんですね．

遠山さん流の言い方をすると，現実があって，数があって，その媒介の辺に量というのがある．論理的に言えば，数と量というのは別に決まっているんだけど，田村さん流分類法で言うと，ぼくはわりと全部ゴシャゴシャ説に近いわけ．数学の感じがすでにそうでね．現実を認識するというレベルがあって，それを適当に焦点を合わせたところで固まっているのが数学で，また焦点をずらすとずっと動くという感じがある．数とか量とかいうのが，数学として別にあるんじゃなくて，何となくその辺にあって，見たときに見えるという感じが強い．

レベルとしては，数学としてきっちりしているやつよりは，もうちょっと漠然としたレベルで，同じ対象を扱っていても，時によっては眼鏡を動かすから，数になったり量になったりするようなところがぼく自身ある．

えざわ・ひろし

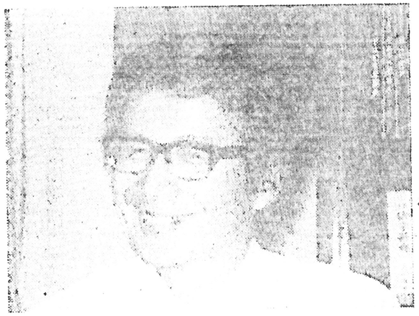
江沢　それはかなり物理の立場に近いかもしれませんね．やっぱり何か現実というのがあって，それを認識したり，秩序立てたりするときの目の付けどころみたいなものじゃないですかね．たとえば，エネルギーという量，力という量を物理に導入するというのは，そういうところに目を付けて現象を見ようと決意することですね．測定器を工夫するのは，その後になる．測定器が決まってしまえば量とは何かということもはっきりするみたいだけれども，しかし，物理理論がだんだん進んでくると，それまでの捉え方ではいけないということにもなってきますね．だから，量とは何かと言われても，それほどはっきり割り切れないです．

齋藤　そうですね，この質問自体が多少無理なわけでしてね．

それから，最初に言おうと思って忘れていたんだけれども，これは「数学と教育」というシンポジウムの一部ではあるが，小島さんの基調報告でも，最初は教育と切り離した「量」の，とくに数学的な理論が書いてあるわけで，まずその部分と，つぎに自然科学や工学で，今ちょっと話が出ていたような部分と，第三に教育に関係のある部分と，その三つをぼくは意識してやりたいと思っているんです．

森　ただ，差し当たりしょうことなしに分けるのはいいけれども，ぼくは分けること自身に抵抗はあるんだよ．

齋藤　ウン，それは分かります．話はどうなったって構わないんですけど，ぼくはそう思っている，というふうに取ってくだされぱいいんです．



こじま・じゅん

◎小島式定式化の意味

齋藤　せっかく小島さんがかなり長い詳しいものを書いてくださったわけで，それへの批判なども当然おありだと思うので，そういうのから始めたらどうでしょう．感想でもいいです．

江沢　量というものがあるらしいから，それをどう捉えるか考えようというところは面白いと思うんだけれども，その先がどうも……．数学の枠というものを予めお持ちになっていて，そこにあてはめてみた，確かにあてはまりましたよという感じ．それ以上に何かあるのか，さて役者はいつか動き出すのかなあという気がして……？

齋藤　これが当たっているかどうかは別として，小島さんを代弁させてもらえば，それが小島さんの最大の目的だったのだろうと思います．いままでの量の理論がきちっとしていなかったという認識のもとに，ああいうことをやることに意味があったということじゃないかとぼくは思うけれども，しかし本人がいるのだから本人に言わせましょう．

小島　いま言うわけですか．（笑）ぼくの書いたのは，たしかに江沢さんが言われたような傾向があると思うんです．量でぼくらがふだんやっていることがうまく数学の枠にはまった．それだけじゃないかと言われれば，そうだと言うほかない．ただ，こういうかたちで量というのを今の数学の枠の中で一応きちんと捉えることは，これまであまりなかったんじゃないかと思うんです．そういう意味で，一応だれかがそれをやっておいたほうがいいということはあったんです．

江沢　そうかもしれませんね．ただ，それが現実の量の理論だというふうに言われますと窮屈なところも出てきます．たとえば，速さにしても，初めのほうには加法的な量のようなことが書いてあって，後ろのほうへ行くと，$\tanh\theta$ としたその θ で加