のでなく，「数学」の中でそっくりそのまま合理化できることがわかった．これは，もちろん，一つの試みに過ぎず，そして，幾分コジツケふうな感じがしないでもないが，単位コミのマルゴトの量の計算が細部にいたるまで「数学」の中で再現できるということが面白い．“すべてを矢印で”というのは，今日の数学では割に普通の態度となっている．私自身にとっては，これはそれほど無理のない，自然な解釈であるように思える．

ただ，子供が量の割算を獲得する過程が実際にどうであるかは，また別のことであるし，今の話が，子供の教育の場に直接持ち込めるとも思わない．

それにしても，「どう教えるか」ばかりがいつも議論され，「ほんとうは，それが何であるか」という問題が軽視され過ぎていると思う．生徒にどう教えるかと同時に，先生がそれをどう理解しているかが問われるべきである．

5．量の乗法について

量の乗法，あるいは積とは，二つの量 $x \in X$ と $y \in Y$ の対 (x, y) に第3の量 $z \in Z$ を対応させる**双線型写像**のことである．写像

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z \quad ; \quad (x, y) \longmapsto \varphi(x, y)$$

が双線型とは，y を固定すると，変数 x について線型，x を固定すると，変数 y について線型であることを言う．

単位量（基底）$u \in X$, $v \in Y$ を定めると，$x = \xi u$, $y = \eta v$ として，

$$\varphi(x, y) = \varphi(\xi u, \eta v) = \xi\eta\, \varphi(u, v)$$

となる．$\varphi(u, v) = w$ を Z の単位にえらべば

$$\varphi : (\xi u, \eta v) \longmapsto \xi\eta\, w$$

となり，φ は実数の積 $(\xi, \eta) \longmapsto \xi\eta$ で表現される．X で ξ 倍，Y で η 倍になると，結果は Z で倍の合成の $\xi\eta$ 倍になるということである．

さきの　速度×時間　で，速度も変数と思えば，双線型写像

$$L(X\,;\,Y) \times X \longrightarrow Y \quad ;$$

$$(\gamma\,\mathrm{m秒}^{-1},\ \xi\mathrm{秒}) \longmapsto (\gamma\,\mathrm{m秒}^{-1})(\xi\mathrm{秒}) = \gamma\xi\,\mathrm{m}$$

が得られる．

［日常の感覚としては，結果はむしろ $\xi\gamma\,\mathrm{m}$ であろう．$\gamma\,\mathrm{m秒}^{-1}$ は時間に作用し，1秒 あたり $\gamma\,\mathrm{m}$ の変位を生みだす．正比例関数だから，ξ秒 に対しては，その ξ倍であるところの $\xi(\gamma\,\mathrm{m}) = \xi\gamma\,\mathrm{m}$ が対応する．こうして

$$(\gamma\,\mathrm{m秒}^{-1})(\xi\mathrm{秒}) = \xi(\gamma\,\mathrm{m})$$

となる．これは作用するものを左にという西欧式の書き方で通している．正比例とは倍との交換可能ということだから，ξ と γ の順序がかわっても不自然ではない．

「6人の子供にミカンを4個ずつあげる」という問題で，$4^{個/人} \times 6^{人}$ と書いたり，$4^{個} \times 6$ と書いたりして，これは日本語の語順だという説明をいつも聞かされるが [10]，実際は日本語ふうなのは $4^{個} \times 6$ だけではないだろうか．$4^{個/人} \times 6^{人}$ で $6^{人}$ を作用素とみると（再双対性！），1人当り1個ずつなら6個だから，全部でその4倍の $6^{個} \times 4$ ということになるだろう．］

双線型とは**複比例**のことであって，別の例として，長方形の面積がタテとヨコの長さから決まる情況を持ち出すことができる．X がヨコの長さ，Y がタテの長さなるものの空間とし，対応する長方形の面積は Z に値をとるものとする．長さの単位を u とし，それに対応する X, Y の基底を u_1, u_2 と書くとき，面積の定まり方

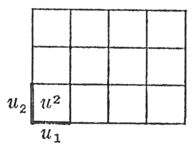
$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$$

は，$x = \xi u_1$，$y = \eta u_2$ に対して，

$$\varphi(x, y) = \varphi(\xi u_1, \eta u_2) = \xi\eta\, \varphi(u_1, u_2)$$

となる．もし $\varphi(u_1, u_2)$ を u^2 と書くと，これは $\xi\eta\, u^2$ となる．u^2（m に対する m^2, cm に対する cm^2 など）が面積の単位である．ヨコ・タテの長さがそれぞれ単位の ξ 倍，η 倍となれば，面積はその合成であるところの $\xi\eta$ 倍になる．

面積というのは，だれにでもそれと了解可能な，“標準的”な積（双線型写像）だから，これを $\varphi(x, y)$ などと書かずに，xy とか $x \times y$ と書くだけでわかる．



$\xi = 4$，$\eta = 3$ のときの面積

図 1

$$5\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm} = 30\,\mathrm{cm}^2 \tag{3}$$

のような式は，このようなものとして理解できる（田村 [1] の 51 ページ）．

$$\text{電流}\times\text{電圧}\quad=\text{電力} \tag{4}$$
$$\text{質量}\times\text{速度}\quad=\text{運動量} \tag{5}$$
$$\text{質量}\times\text{加速度}=\text{力} \tag{6}$$

なども，一応同じように考えることができる．

しかし，これらにも，いろいろ問題となることがある．二番目の式は運動量が質量と速度に複比例しているというより，質量 × 速度 をもって新しい量である運動量を定義すると考えるのが普通であろう．そうすると，$X\times Y$ からすでに存在する Z へというのでなく，X と Y から第三の新しい空間を作りだす話となる．数学では，**テンソル積** $X\otimes Y$ がこれにあたる概念である．それは一つの“普遍問題”の解としてカテゴリー論的に定義され，構成法は何を使ってもよい，とするのが今日の数学の普通の立場である．1次元の場合，X, Y の基底 u, v に対し，形式的に $u\otimes v$ というものを考え（それは対 (u,v) のことだと思ってもよい），その実数倍の全体 $\{\zeta u\otimes v\mid\zeta\in\boldsymbol{R}\}$ を $X\otimes Y$ とおく．次に $(x,y)\in X\times Y$ に対して，$x=\xi u, y=\eta v$ として，“双線型性により” $x\otimes y=\xi u\otimes\eta v=\xi\eta\,u\otimes v$ と定める．こうしてテンソル積 $\otimes:(x,y)\longmapsto x\otimes y$ が構成される．別の基底 $u'=pu, v'=qv$ をとると別のテンソル積 $x\otimes' y$ ができるが，$u'\otimes' v'$ に $u'\otimes v'=pq\,u\otimes v$ を対応させる同型で，$x\otimes' y$ が $x\otimes y$ に重なるから $\otimes$ と $\otimes'$ を区別する必要はない．

上に述べた**普遍性**とは，$X\times Y$ から別の任意の Z への複比例関数は，テンソル積 $X\otimes Y$ からの比例関数でおきかえられるということである（普遍性については [7] の 4 を参照のこと．そこでは，“再双対性”を使った別の構成法も述べた）．$(x,y)\longmapsto z$ が複比例のとき，z は積 $x\otimes y$ に比例する．

さきほどの面積の場合，ヨコ・タテの長さの形式的なテンソル積 $x\otimes y=\xi\eta\,u_1\otimes u_2$ に面積 $x\times y=\xi\eta\,u^2$ は比例する．この比例関数は $X\otimes Y$ と Z の同型を与える．言うまでもないが，この同型とは単なる線型空間としての同

$$\begin{tikzcd}
 & X\times Y \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\times"] & \\
X\otimes Y \arrow[rr, "\cong"] & & Z
\end{tikzcd}$$

型でなく，二つの矢線 $\otimes$ と $\times$ が重なるような同型である．

そういう解釈のもとで，(3) のような式はヨコ・タテの長さを与えたときの面積を与える式というより，ヨコ・タテの長さの積を計算したものが面積だという，単純な等式となる．

$$(\text{電力，時間})\longmapsto\text{電気料金}\quad;\quad X\times Y\longrightarrow Z$$
$$(\text{重量，距離})\longmapsto\text{輸送料金}\quad;\quad X\times Y\longrightarrow Z$$

のような写像は，たとえこれが双線型であると仮定しても，電力 × 時間 ＝ 電気料金 と思う人はいない．この場合，$X\otimes Y=Z$ ではなく，電気料金は使用電気量（＝仕事）の空間 $X\otimes Y$ から金額の空間 Z への線型写像とみなされる．つまり $L(X\otimes Y;Z)$ の元である．

結局，量の積として

$$L(X;Y)\times X\longrightarrow Y \tag{7}$$
$$\varphi:X\times Y\longrightarrow Z \tag{8}$$
$$X\times Y\longrightarrow X\otimes Y \tag{9}$$

などを考えてきたが，ここで一番強調しなければならないのは，このような“分類”は決して固定的なものでないということである．

実際，(8) の形の積の中でも，“普遍的”，“標準的”なものは (9) と同一視されていることはすでに述べた（あくまでも X, Y, Z が1次元のときの話）．つまり $Z=X\otimes Y$ としてよい．(7) は (8) の特別の形だから，$L(X;Y)\otimes X$ は Y と同一視される：速度 t と時間 x の本来の積 tx と新しい形式的な $t\otimes x$ は区別しないでよい．また，電力 ⊗ 時間 は本来の 仕事率 × 時間 として仕事にもどる．

(8) は双線型写像（積）の一般の形で基本的であるが，φ が非退化の場合，X と Y は Z に関して互に双対である．すなわち，$X=L(Y;Z)$, $Y=L(X;Z)$ となる．

$$\text{電圧}\times\text{電流}=\text{電力} \tag{4}$$

という計算では，電圧と電流が電力に関して互に双対だということが重要である．現実に一つの回路の上の電流と電圧を考えるときは，X, Y が多次元の線型空間となるが，上の双対性は Z が1次元であれば成立つ．

高橋利衛先生は，**流通量**（電流）と**位差量**（電圧）の間の，**不変量**（電力）に関する双対性としてこの状況をとらえ，この「量規定」を一つの典型として

大著『基礎工学セミナー』[3] を書かれた.

一方, **外延量 vs 内包量** というのが数教協などの量の理論の大きな柱となっている.

内包量とはいろいろと説明されているが,「加法が絶対できないというわけではないが, それは量を荷う物体の合併とは対応していない」「このような量のほとんどは, 二つの量の商として得られるので, 強さの量とか内包量 (intensive quantity) とよばれている」という説明がある (銀林 [9] 47 ページ).

ともすれば, 外延量, 内包量という区別は, 量の関係を扱うその都度の情況をはなれて, 固定的な分類として, お題目のようにとなえられがちである. しかし実際は固定的な分類ではうまく行かないことは今の電流, 電圧の例からも明らかである:

電流や電力 (仕事率) は, それぞれ電気量や仕事を時間で割ったもので, その意味で内包量だが, (4) のような式では, 両辺が時間で割られていることは, ほとんど取るにたりないことである. だから, 電流は外延量と考えてよい. 単位の定義　ボルト = ワット / アンペア　をみると電圧は内包量で, この式は

内包量 × 外延量 = 外延量　(10)

の形をしている.

しかし, 電圧は「物体の合併」つまり枝の直列に対して加法的だという意味では外延量であり, 電流は点を通過する強度 (時間で割ることに関係なく) という意味で内包量である. 同じ (10) でも全く逆に適用した方がよいかも知れない. それに数教協の (10) は私の (7) が二変数について双線型のつもりであるのに対して, 内包量と書いた方は定数で, 外延量と書いた方についてだけ線型というニュアンスが強い. だから, 電流と電圧を対等な二変数とみたければ「複比例」の型に入れることになるのだが, その場合, 二つの変数はどちらも外延量ということになる. ……

6. 量代数の世界

ここで一般の話にもどると, 量を量で割るとき $L(X;Y)$ の元となるのだったが, これは X の双対 X^* と Y のテンソル積 $Y \otimes X^*$ と一致する. その基底

$$vu^{-1}: X \xrightarrow{u^{-1}} R \xrightarrow{v} Y$$

はテンソル積 $v \otimes u^{-1}$ と同じものである.

こうして, テンソルの計算として, 量の四則演算が機械的に自由にできる. ([7] の 4 である程度具体的に述べた.)

$\boldsymbol{M}$ を質量, $\boldsymbol{L}$ を長さ, $\boldsymbol{T}$ を時間の線型空間とすれば, $\boldsymbol{L}^{(2)} = \boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{T}^{(-2)} = \boldsymbol{T}^* \otimes \boldsymbol{T}^*$ として, エネルギーは $\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{L}^{(2)} \otimes \boldsymbol{T}^{(-2)}$ の元であり, 力の大きさは $\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{T}^{(-2)}$ の元である. (物理的) **次元** とはこういうもので, 質量, 長さ, 時間に対して, エネルギーの次元は $(1, 2, -2)$ であり, 力の次元は $(1, 1, -2)$ である.

多くの人はこの“量空間のカテゴリー”あるいは“線型空間のカテゴリー”での計算を数学の形式としてはっきり自立させるのでなく, オモテの数学としては, すべてを実数体 $\boldsymbol{R}$ に投影し, $\boldsymbol{R}$ での四則演算として扱う. しかし,「数は量の表現」なのだから, 数の計算に逆に量としての意味を持ちこみ, さまざまな背後の情況に応じたニュアンスの違いを深く細かく追及することになる. 数の乗法一つとっても, 倍操作型, 複比例型, 比例型の三つがあると言い, さらに「倍はつまらない」という価値判断が加わる. しかし, 重要なことは, その際あらわれる実数の乗法は何ら違いがなく, すべて“倍”の合成だということである.

7. その他の問題

時間に対する時刻, 変化に対する位置のような, 一般に“ベクトル”に対する“点”が構成する空間を**アフィン空間**という. 我々の日常の空間というのは, 一つの“剛体”の枠を前提に, 時間と無関係な位置というものが意味をもち, 3 次元アフィン空間である. 1 次元の例としてはポテンシャルなど, “高さ”をもって語られるものがアフィン的で, これには自然な原点がなく, したがって線型構造をもたない. 線型構造をもつのは, 点 (位置) の差であるところのベクトルである.

温度は, 物理では絶対温度として表現されるように, ユークリッド式量であるが, 日常の生活で気温が 17°C とか 23°C とか言うレベルでは, 単にアフィン空間の点でしかない.

温度と速度は「内包量」の代表として, よく並べて語られる. その際, まず「量とは物体の一側面である」という“量の規定”がある. その一側面は数値