◎基調報告

量の数学について

小島 順

0. まえがき

量というもの，とくに量の計算の数学的構造について考えよう．銀林浩氏（[8],[9]）によれば，量の理論は「対象のもつ現代数学的構造と歴史的社会的発展と人間の心理的発達との三者の総合でなければならない」し，実際に数学教育協議会（数教協）の“量の理論”はそのような感じのものであるが，この報告では主に第一の数学的構造に話が限られていることをまずお断りしておく．

日常の生活の中での人間の営みとしての量の計算は，それがどのようなレベルのものであれ，一定の構造をもち，数学の中の言葉で表現できる．しかし，ありのままの姿でそれを数学にとりこむには，数学自身が古くてはダメで，ある程度の“現代的”な観点に立つ必要がある．これが，本 [5] や『数学セミナー』の連載 [7] で私が主張したことであった．

量と数の関係をどう見るかが一つのポイントになる．量を重視する立場の人の中でも，「数は量である」派の人々（田村二郎氏の命名 [2]）は，表層の数学においては，数の計算と区別された“量代数”を意識することが少なく，かえって量を「影の世界」にとじこめてしまう傾向がある．

私は田村二郎氏とともに「数は量の倍変換である」派に属する．山崎圭次郎氏 [11] もだいたいそうだと思う．対称性のある一種類の量の加法群 X の自己準同型の体 $\mathrm{End}(X)$ として実数体を作る話は田村氏の『量と数の理論』（はじめに『数セミ』の連載 [2] で，あとで書きかえて単行本 [1] に）に詳しい．私の [5],[7] はそのあと，つまり実数体はすでに存在し，X は1次元線型空間というところから出発していた．

たとえば物理的な量に限っても，量について全面的に議論するためには，量

があらわれる実際の情況とともにでなければならない．［高橋利衛氏の二つの大著『基礎工学セミナー』［3］と『図説基礎工学対話』［4］は「基本的な物理量間の関係としての物理法則を一つ一つ，構造的に解明」するなかで量の論理を捉えるといった様子の，他に例のない本であって，「数学」の側で吸収すべきものが一杯つまっている.］しかし，以下の報告ではそこまで達していない．それ以前の段階にとどまっている．

森毅さんを含めての数教協を“敵”と見立てて書いた部分が多い．それは，その存在が巨大で，かつ私にとって身近なせいで自然にそうなっただけのことである(相手にしてもらえないので，こちらからケンカを売るという気持もある)．

なお，以上書いたことを含めて，最近の量をめぐる議論の紹介として，高橋氏の論説［13］と，［4］の序章がある．

1. 量の空間

量とは何か，という種類の話からは始めない．普通の人が，日常の生活の中で現実に量を扱っているではないか，というレベルで考えよう．小さな子供の教育という観点からは，量の扱いの中で数の概念（実数にいたるまでの）が作られていくのだということが重要だが，一応，ここでは，数の概念をすでにもっている大人の話としておく．

また，量の計算と言えば，その本筋は違った種類の二つの量の積や商にあるが，出発点として，まず一種類の量の全体を考えよう．

少し特殊な例かも知れないが，時間つまり時の経過の全体を X と書けば，X は $\boldsymbol{R}$ 係数の１次元線型空間である．５秒とか２時間とかいうのが X の元で，

$$3\text{秒}+2\text{秒}=5\text{秒}$$
$$4\text{秒}\times 3 \quad =12\text{秒}$$

のように，X には二つの演算――和とスカラー倍――が定まり，これについて X は実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間となる．

時間×時間という掛け算は X の中の演算としては少なくとも存在しない．だから，この X は“四則演算”が自由にできる実数体 $\boldsymbol{R}$ とは代数的構造が全然ちがう．

「もともと異質の概念である量と数を明確に区別し，数を量空間の変換とみ

なす――これが本書を一貫する方針である」と田村氏は書いている（［1］のはしがき）．量と数の関係について考察するのがテーマだとすれば，当然そうなるはずであって，実数は X に属する二つの量 x, u の比としてあらわれる．$u\neq 0$ を**単位量**――たとえば秒――として固定するとき，任意の量 x に対して，x が u の ξ 倍となるような，つまり $x=\xi u$ となるような実数 ξ が唯一つ存在する．

これは X が u を基底として１次元ということである．

任意の実数 λ は λ 倍する変換として X 全体に作用する．

$$\lambda : x \longmapsto \lambda x \quad ; \quad X \longrightarrow X$$

である．X の線型変換はすべてこの形をしており，その全体 $\mathrm{End}(X)$ が体として $\boldsymbol{R}$ と同一視される．実数の積 $\lambda\mu$ とは倍変換としての合成――μ 倍して λ 倍する――に他ならない．

時間の１次元線型空間 X は田村氏の言う**対称量空間**にあたる．同じ１秒といっても，二つの向きがある．過去から未来へ向かう１秒と，未来から過去へ向かう１秒と二つあり，両者は“数学的構造”としては全く対等，つまり対称的である（人間の歴史にとって時間が対称的であるわけはないが）．実数の -1 は時間の反転という X への作用を意味する．かりに未来への１秒を 秒 とかけば，過去への１秒は $-$秒 と書ける．しかし 秒 と $-$秒 は対称的である．これに反して実数の１と -1 は少しも対称的でない：$1\times 1=1$ なのに，$(-1)\times(-1)=1$ である．ここにも量と数の違いがあらわれている．田村氏は［2］の1978年４月号でこの点を明快に述べておられる．

対称量空間の他の例としては，一つの直線 l の上の変位（束縛ベクトルとしてでなく自由ベクトルとして）の全体 Y を考えることができる．かりに l が東西に伸びているとすれば，東への $1\,\mathrm{m}$ の変位を v とするとき，任意の変位 y は $y=\eta v$ と一意的にあらわされる．y が西への $5\,\mathrm{m}$ の変位ならば $y=-5v$ である．

さきの時間の空間 X には，我々の日常感覚としては，標準的な向き――未来へ――があり，その意味で X は向きづけられていると言えるが，変位の空間 Y には，標準的な向きとしてあらかじめ決まっているものはない：Y は向きづけられていない．

電気量（単位はC(クーロン)）の全体の空間も対称量空間である．正と負と

名付けられた対称的な電気量がある．名前は正，負がついていても，それは便宜的なものに過ぎない．

向きづけられた量の空間の極端な場合に，本来は負の部分のないものがある．長さ，面積，体積，質量などの量空間で，田村氏はこれを**ユークリッド式量空間**と呼んでいる．

長さは我々の日常的な意味での空間に固有な概念であって，その二点を結ぶ線分の長さというものがあることを我々は知っている．この場合，同一直線上にない二つの線分，平行でない二つの線分に対しても，共通の長さの概念が適用できることが重要である．それは剛体運動，とくに回転の概念が始めから存在するからだ，とも言える．

田村氏の本では，まずこのユークリッド式量空間をもとに，正の有理数が構成され，対称量空間で負の有理数に拡大し，その後でユークリッド式量空間にもどって，正の実数を構成し，……という順序となっている．

ユークリッド式量空間というのは，1 次元線型空間の半分に正の実数 $\boldsymbol{R}^{+}$ が作用しているというようなものだから，普通の数学の習慣から言うと，扱い方が不自由である．だから，長さ x に対して，“負の長さ” $-x$ なるものを付け加えて完全な 1 次元線型空間に拡大しておくとよい．その形式的な構成法はいろいろとある．これを $\boldsymbol{L}$ と書いておく．

引き算についての“余り”だけでなく“不足分”も $y-x$ の形で $\boldsymbol{L}$ に実現される．長さの変化量（増加と減少）の全体が $\boldsymbol{L}$ で，もとの“長さ”は，$\boldsymbol{L}$ の増加量の部分に埋めこまれていると見てもよい．

質量の 1 次元線型空間 $\boldsymbol{M}$ についても事情は同じである．$\boldsymbol{L}$ や $\boldsymbol{M}$ はその出生からして，はっきりした正の向きがある．さきに述べた直線上の変位で，便宜的に東への 1 m を正，西への 1 m を負と見なすというのとは全然意味がちがう．

こういう対称性や向きづけの問題は，これまでの「量の理論」では軽視されてきたのではないかと思う．この点をはっきりと指摘したのが田村氏の [1]，[2] である．

これから後の議論では，単に量の 1 次元線型空間ということで，二種類の量空間の区別を棚上げにする．

2. 量と数

量の線型空間 X と実数体 $\boldsymbol{R}$ の関係については，すでに少し述べたが，X の倍変換の体 $\mathrm{End}(X)$ の抽象（さまざまな X に対するそれの）が $\boldsymbol{R}$ である．

数教協などでは，そうでなくて，「量の抽象が数である」というのが正しい思想で，数を二つの量の比（つまり“関係”）とみたり，“倍”という操作とみるのは正しくない思想である，とするような気分が濃いのではないかと思う．

以下は分数についてだが，遠山啓氏の [12] に「実体概念と関係概念」という項がある．分数を一つの連続量の抽象的表現とみるか，二つの量の関係概念としてとらえるかということであるが，遠山氏は「ごく常識的にいっても実体概念のほうが先で関係概念は後になる」と言う．

例えば $\dfrac{2}{3}$ という分数が一つの長さ x の抽象的表現であるとは，ある決まった単位を前提とし，その単位（ここでは m としよう）で測った数値が $\dfrac{2}{3}$ ということ，つまり $x=\dfrac{2}{3}\mathrm{m}$ ということであろう．しかし，それは二つの量 x と m の比が $\dfrac{2}{3}$ であり，m の $\dfrac{2}{3}$ 倍が x であるということ以外の何物でもない．事実をありのままに見ると，数 = 量の比 という“関係概念”がまずあって，“実体概念”である量はそれをもとに表現されていることがわかる．

だから，人が“比”や“倍”という言葉で話を始めたとしても，そのことをもって「悪い思想」と極めつけるのはおかしいと思う．

もう少し，量と数の関係について続ける．長さを $x=\xi\mathrm{m}$ と書けば，ξ は実数であることがわかる．私は数 ξ に単位の名前 m をそえるというつもりで $\xi\mathrm{m}$ と書いているのでない．m は単位量であり，この m という X のベクトルの ξ 倍が量 x であるというつもりでこう書いている．しかし，普通には量と数に二つの文字を使いわけることなく，単に長さ x m と書く．「数は量の表現である」派の人たちは，これを「名前のある数」とか，「単位という着物を着た数」というふうに考えるらしい．この場合，x は数であると同時にある量を指していて，それが m という“助数詞”をそえることで示される，ということになるのだろうか．この量の表記法については高橋氏の [4] の序章と [13] が参考になる．

3. 双対空間

一種類の量という範囲内の話としては，その全体の空間 X に対する，その双対空間 X^* について説明しておく必要がある．

一般に，X と Y を線型空間とするとき，X から Y への線型写像の全体のつくる線型空間を $L(X;Y)$ と書く．実数体 $\boldsymbol{R}$ も線型空間とみなせるから，$L(\boldsymbol{R};X)$，$L(X;\boldsymbol{R})$ の二つが考えられるが，$L(\boldsymbol{R};X)$ の方は X と同一視される：$\boldsymbol{R}$ からの線型写像は1に対する値で定まるから，$u\in X$ は矢線（線型写像のこと）

$$u:\boldsymbol{R}\longrightarrow X \quad ; \quad \xi\longmapsto \xi u$$

とみなすことができる．

これに反して，$L(X;\boldsymbol{R})$ の方は X と同一視することができない．この空間 $L(X;\boldsymbol{R})$ を X^* とかき，X の双対空間と呼ぶ．$u\neq 0$ のとき，上のように矢線と見た u は同型であり，その逆同型

$$u^{-1}:X\longrightarrow \boldsymbol{R} \quad ; \quad x=\xi u\longmapsto \xi$$

は X^* の元で，X^* の基底となる．u^{-1} は単位 u で量を測るという操作をあらわす．つまり**測度** (measure) である．

時間の場合，秒$^{-1}$ は時間を秒で測る測度であり，長さの場合，m^{-1} は長さを m で測る測度である．$\mathrm{cm}=\dfrac{1}{100}\mathrm{m}$ に対して，$(\mathrm{cm})^{-1}=100\,\mathrm{m}^{-1}$ であることに注意する：cm で測ると測定値は100倍になる．$u\longmapsto u^{-1}$; $X\longrightarrow X^*$ は線型でない．

あるいは，測度 u^{-1} とは，“X 上の変数 ξ である”と言うこともできる．量をあらわす変数とはありふれた概念だが，それは結局，量（そのもの）x に，一つ定めた単位 u で測った数値 ξ を対応させる操作のことである．変数となるのは，“任意の”量 x について，それを考えるからだ．

量$\in X$ と 数$\in \boldsymbol{R}$，さらに 量の測度$\in X^*$ の三つを明確に区別する．これが今まで述べてきたことであった．

4. 正比例

二つ以上の種類の量が関係する場合にうつると，まず，X, Y を量の空間として，X から Y への線型写像（正比例関数）$t:X\longrightarrow Y$ は新しい一つの量と見なされる．

例えば，X が時間，Y が一つの直線上の変位の空間とするとき，$t\in L(X;Y)$ は変位が時間に比例する一つの情況をあらわしている．X の単位として秒を，Y の単位として m をとると，t は秒に対する値できまる．$t\cdot$秒 $=\gamma\,\mathrm{m}$ とすれば $t=\gamma\,\mathrm{m}\,$秒$^{-1}$ である．そして $x=\xi$秒に対して

$$tx=(\gamma\,\mathrm{m}\text{秒}^{-1})(\xi\text{秒})=\gamma\xi\,\mathrm{m} \tag{1}$$

となる．t は毎秒 $\gamma\,\mathrm{m}$ という速度であって，この書き方 $\gamma\,\mathrm{m}$秒$^{-1}$ は物理での慣用と一致する．それと同時に m秒$^{-1}$ というのは単なる記号でなく，数学の中で直接的な意味を持っている：m秒$^{-1}$ は

$$X \xrightarrow{\text{秒}^{-1}} \boldsymbol{R} \xrightarrow{\mathrm{m}} Y$$

という矢線の合成である．(1) の計算は図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] & Y \\ \boldsymbol{R} \arrow[u, "\text{秒}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \boldsymbol{R} \arrow[u, "\mathrm{m}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x=\xi\text{秒} \arrow[r, mapsto] & y=\gamma\xi\,\mathrm{m} \\ \xi \arrow[u, mapsto, "\text{秒}"] \arrow[r, mapsto, "\gamma"'] & \gamma\xi \arrow[u, mapsto, "\mathrm{m}"'] \end{tikzcd}$$

で説明される．($\mathrm{m}\gamma=\gamma\,\mathrm{m}$ という可換性は m が線型だということの表現である)

$x=\xi$秒 で $y=\eta\,\mathrm{m}$ 走ったとすれば，そのときの速度 t は $tx=y$ より $t=yx^{-1}$ ときまる（両辺に右から x^{-1} を掛けただけ）．これが量の**割り算**で，

$$yx^{-1}=(\eta\,\mathrm{m})(\xi\text{秒})^{-1}=\frac{\eta}{\xi}\,\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1} \tag{2}$$

となる．$(\xi\text{秒})^{-1}=\dfrac{1}{\xi}\text{秒}^{-1}$ であって，

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "t"] & & Y \\ & \boldsymbol{R} \arrow[ul, "x"] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \text{秒} \arrow[r, mapsto, "(\xi\text{秒})^{-1}"] \arrow[rr, bend left, "t"] & \dfrac{1}{\xi} \arrow[r, mapsto, "\eta\,\mathrm{m}"] & \dfrac{\eta}{\xi}\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$$

となる．

この量の割算は，量をあらわす数の割算でなく，測ることの前に存在する量そのものの間の割算である．普通にやる (1) の形の計算が，単なる便宜的なも