量の計算の理解と作業を援ける ”知的ツール” としての ”量の分数”

a　資料として，時間・速度・距離の計算の例を示す。時間と速度は距離に関して dual (双対的)，それを左右で対比した。

b　分数（量の分数）は比例の表現そのものである。分数の形のままで考えるスタイルの表を併記した。

矢線	速度 $= 3\,\mathrm{m/s}$	時間 $= 4\,\mathrm{s}$
構成	(0-1) $\dfrac{12\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} = \dfrac{12\,\mathrm{m} \times 1/4}{1\,\mathrm{s}} = \dfrac{3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{m/s}$	(0-2) $\dfrac{12\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{12\,\mathrm{m} \times 1/3}{1\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{4\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = 4\,\mathrm{s}$
前進	(1-1) $4\,\mathrm{s} \times 3\,\mathrm{m/s} = 4\,\mathrm{s} \times \dfrac{3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{m} \times 4 = 12\,\mathrm{m}$	(1-2) $3\,\mathrm{m/s} \times 4\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{m/s} \times \dfrac{4\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = 4\,\mathrm{m} \times 3 = 12\,\mathrm{m}$
後退	(2-1) $60\,\mathrm{m} \div 3\mathrm{m/s} = 60\,\mathrm{m} \times \dfrac{1\,\mathrm{s}}{3\,\mathrm{m}} = \dfrac{60\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}}\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{s}$	(2-2) $60\,\mathrm{m} \div 4\,\mathrm{s} = 60\,\mathrm{m} \times \dfrac{1\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{m}} = \dfrac{60\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m}}\,\mathrm{m/s} = 15\,\mathrm{m/s}$

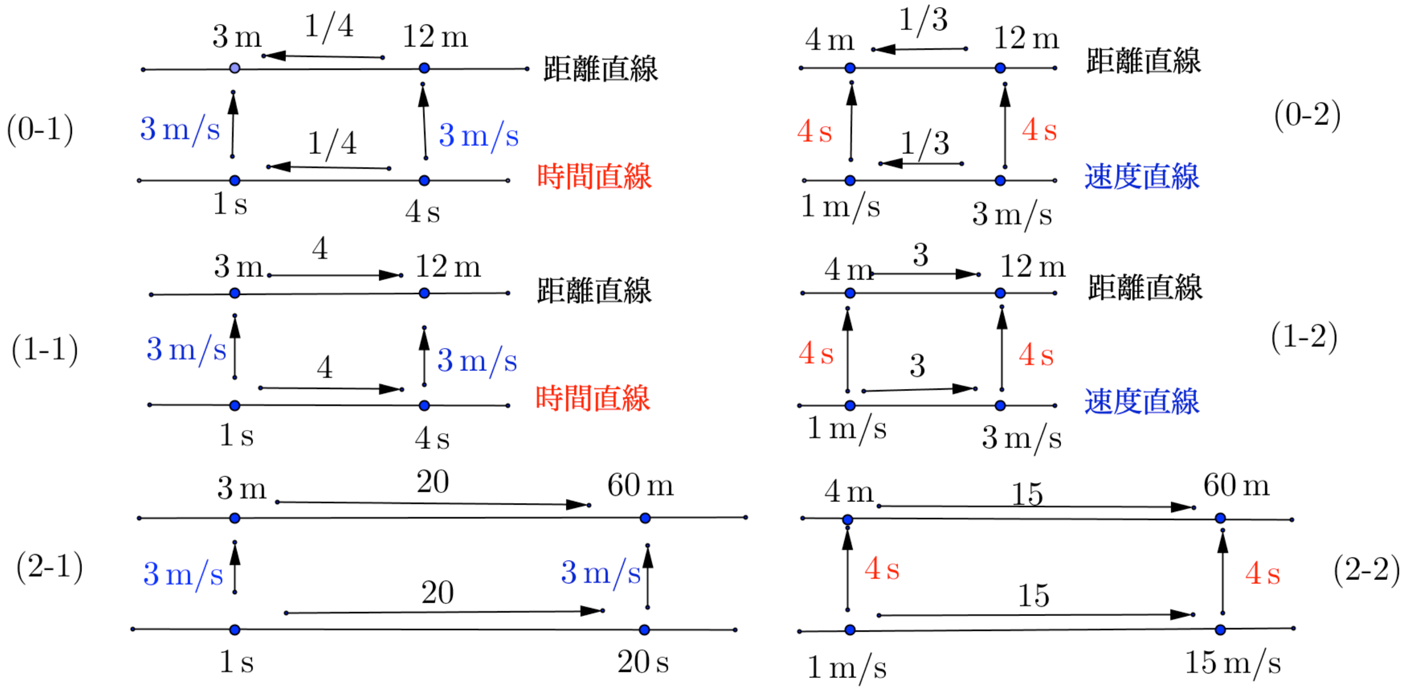
矢線	速度 $= 3\,\mathrm{m/s}$	時間 $= 4\,\mathrm{s}$
構成	(0-1) $\dfrac{12\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} = \dfrac{12\,\mathrm{m} \times 1/4}{1\,\mathrm{s}} = \dfrac{3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{m/s}$	(0-2) $\dfrac{12\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{12\,\mathrm{m} \times 1/3}{1\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{4\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = 4\,\mathrm{s}$
前進	(1-1) $3\,\mathrm{m/s} = \dfrac{3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = \dfrac{3\,\mathrm{m} \times 4}{4\,\mathrm{s}} = \dfrac{12\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}}$ ↑	(1-2) $4\,\mathrm{s} = \dfrac{4\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{4\,\mathrm{m} \times 3}{3\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{12\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}}$ ↑
後退	(2-1) $3\,\mathrm{m/s} = \dfrac{3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}} = \dfrac{60\,\mathrm{m}}{(60\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{m})\,\mathrm{s}} = \dfrac{60\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s}}$ ↓	(2-2) $4\mathrm{s} = \dfrac{4\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{60\,\mathrm{m}}{(60\,\mathrm{m}/4\,\mathrm{m})\,\mathrm{m/s}} = \dfrac{60\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{m/s}}$ ↓

c　例えば，距離と時間から速度を求める計算は，比例を表現するものとしての分数を構成する (0-1) と，掛け算の逆演算として時間で割る (2-2) の二つがある。

d　分数は分母を分子に移す（運ぶ）ことで定まる比例（線型写像）だから，この分数で割ることは「分子を分母に運ぶ」計算である。「分母と分子を交換して掛ける」としても同じ。

e　包含除の一般化である ((0-1)と (0-2) の中で等分除 が現れ，等分除の一般化である (2-1, (2-2) の中で包含除が現れる。

f　次に計算の図示をする。矢線を主役としている。現代の数学で基本的な「可換図式」につながる形をしている。



g　数学の思考を等式の連鎖で表現する。これが数学の基本の語り方である。このプロセスを視覚化したのが，この可換図式（もどき）である。

h　この図示は計算尺（対数）の原理に従っている。物差しでなく，例えば同じ 4倍で結ばれるものは上下で揃うように置かれている。また ¼ は 4 と反対向きの同じ“長さ”で描かれている。これは計算尺である。

i　掛け算の順序に関する，いわゆる“ 4 × 3 か 3 × 4 か ”論争は，最初の表の　(1-1) と (1-2) という二つの等式連鎖の中で的確に答えられる。

j　量分数という形と扱い方は<u>計算の意味をよく反映</u>している。その結果，一々意味を考えない<u>機械的・自動的な計算が可能</u>となった。

（2019/11/10　　小島 順）