2019/11/30　 小島 順

分数についてのいくつかの事項

1　「量の計算の理解と作業を援けるツールとしての”量の分数”」　注釈編

この長い題名の短い（2ページの）作品は別に添付する。ツール（tool）は道具のことだが，ここでいうツールは mental tool, cognitive tool であり，各人が自分の大脳にインストールして使う道具である。”文化進化”は社会に累積される。”量の分数” という知的ツールは文化進化の産物であり，人はそれを自分のものにすることで賢くなる。

”学ぶ” とは，新しいものの獲得だから，その定義により，ジャンプ（飛躍）がある。教育の本質は上に引き上げることである。

二つの表と図示と，同じ番号が三箇所に能われるが，数式の (0-1), 量分数形式の (0-1), 図示の (0-1)などと引用することにする。

矢線中心に表は作った。矢線は「作用するもの」であり，矢線として速度を選ぶ方が標準，第一に取り上げるべき対象である。　しばらく標準的とした左側だけについて議論する。

構成とは，二つのデータ（左側の標準的の方では時間と距離）から速度という量の分数である矢線を構成する話である。

前進とは矢線の向き通りに作用すること，つまり「速度を掛ける」ことである。

後退とは矢線の向きの反対に作用すること，つまり「速度で割る」ことである。

構成の (0-1)についての注釈

数式連鎖の第1辺 は量の分数である。分母 4 s と分子 12 m の単なる比でなく，「4 s 当たり 12 m」という比例を表現している。それは 当然，「8 s 当たり 24 m」や 「1 s 当たり 3 m」という認識を初めから含んでいる。「同じ数を分母分子に掛けても分数の値は変わらない」は確かめること，証明すべきことでは全然なくて，概念が成りたち意味を持つための基盤・前提である。

第2辺への移行は分母と分子に共通の操作 ÷ 4 = × 1/4 を加えている。

最後の第4辺について： s = 1 s を確認しよう。これは同一物である。
千円 = 1千円,　万円 = 1 万円　と同様である。3 m/s = 3 m/1 s であり，これは第3辺の分数と同一物，単に上下の配置を左右の配置に変え，水平のバーを斜めのスラッシュに変えただけである。はじめに分数で出発したから，そのまま分数で終わり，3 m/1 s となったのである。
そうでなければ 単位 m/s は，付けたとしても「取って付けただけ」のものになる。現状の学校教育ではそうである。速度（等速度）は比例なのだから，その計算式が比例を表現する量分数でなければならない，のは当然である。ただし，全く別の文脈で (2-2) に当たる 12m ÷ 4 s も有用であるが，これは後に回そう。
「量の値」は 12 m，や 4 s のように，「数値と単位の積」で表される。数値と 単位の間はスペースが必須である（今はテキストとしてタイプしているのでスペースが少し広すぎるが）。
スペースが積の演算記号の役割を持っている。

前進 (1-1) について：
　速度 3 m/s は作用だから，日本の数学文化に定着したルールにより，
× 3m/s として右から作用する。それは 後退 (2-1) で ÷ 3 m/s が右からであるのと同じである。
左から 3 m/s ÷ と書く人はいない。
3 m/s は第2辺で，量分数としてのフル規格（？）に書き直した。1 s 当たり3 m だから 4 s では
その 4倍の 3m × 4 となる。図示の (1-1) でこの動きが納得できる。この”可換図式”において，
1 s から 12 m に向かう二つのルートが等号で結ばれる。全ては「比例」の実現である。

後退の (2-1) について：
　÷ 3 m/s は × 3 m/s の逆だから，1s を分子に 3 m を分母にと，上下が逆転する。つまり“ 3 m 当たり 1 s “である。距離は 60 m としたから，1 s の 20倍となる。ここでは第3辺のが包含除の 60 m/3 m が計算プロセスの中核にある。(0-1) では等分除
× 1/4が計算プロセスの中核にあったこととの対比に注意する。

分数形式の (1-1) と（2-1）を検討する。
　速度の量分数を一つ与えられた時，終始その量分数に止まってその中で全てを処理する。(1-1) では分母を 1 s から 4 s に変えながら分数としての同一性を保つために分子も 4倍する。この時の分子 12 m が求める距離である。(1-2) では逆に分子を3 m から 60 m に変えている。分数の同一性が保たれている前提のもとでは，必然的に分母は 20 s に変わる。分数形式の (2-1）では数式の (2-1）で分母分子を交換したのと違って，そのままで上から下を見る。垂直の下向き矢線を添えてそのことを示した。
（1-1） と (2-1) は , (1-1) では倍の ×4 が， (2-1) では 包含除の 60 m/3 m が特徴的だったが，実は (1-1) には 包含除 4 s/1 s が隠れているし，(2-1) には 倍の 1 s × 20 が隠れている。詳細に見れば両者の構造は完全に対称的である。向きが逆なだけである。

双対（dual ）を扱う右側：
　二つの変量である時間と速度から距離を求める掛け算は複比例（双線型，bilenear)
である。速度の値を一つ 3 m/s と定めるとそれは時間変量に比例として作用する。
しかし，時間の値を一つ 4 s と定め固定すると，速度変量に比例として作用する。
4 s は様々な速度に対して，4 s の間にその速度で到達する距離を対応させる比例である。つまり

$$4\,\mathrm{s} = \frac{4\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} : t\,\mathrm{m/s} \mapsto 4\,\mathrm{m} \times t = 4t\ \mathrm{m}$$

という比例関数を自然な形で定める。
　（1-2）では 第1辺の 4 s を上のような比例の分数に置き換えている。(2-20 の ÷ 4 s は 分母と分子を入れ替えて掛けている。
　（0-2） では量分数のルールに基づく処理の後，最後に 4 s に置き換えている。

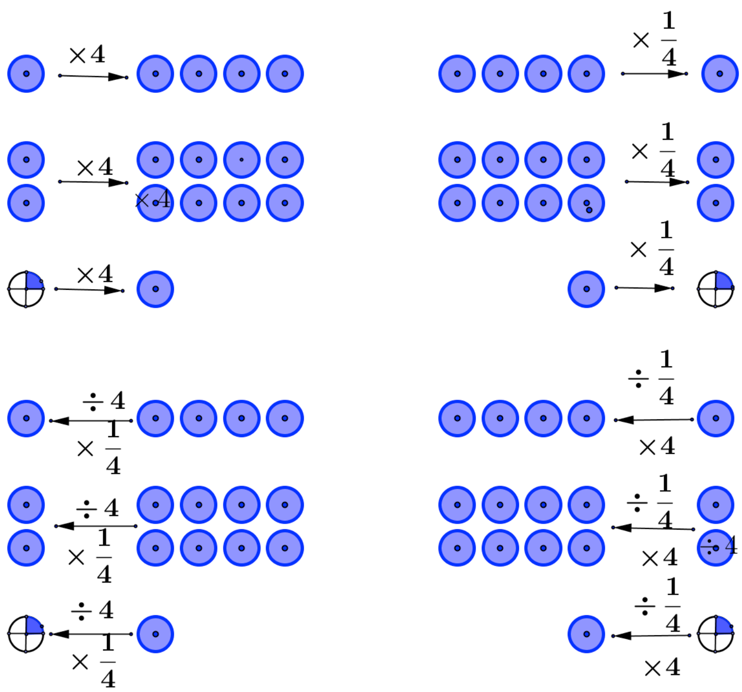
2　逆と割り算,　 4 と 1/4 は互いに逆,　$\div \mathbf{4} = \times \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$,　$\div \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \times \mathbf{4}$

$\div 4$ は <u>定義により</u>　$\times 4$ の逆である。$4 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \times 4 = 1$ により，$\times \dfrac{1}{4}$ がその逆の役割を果たしているから，$\div 4 = \times \dfrac{1}{4}$ となる。

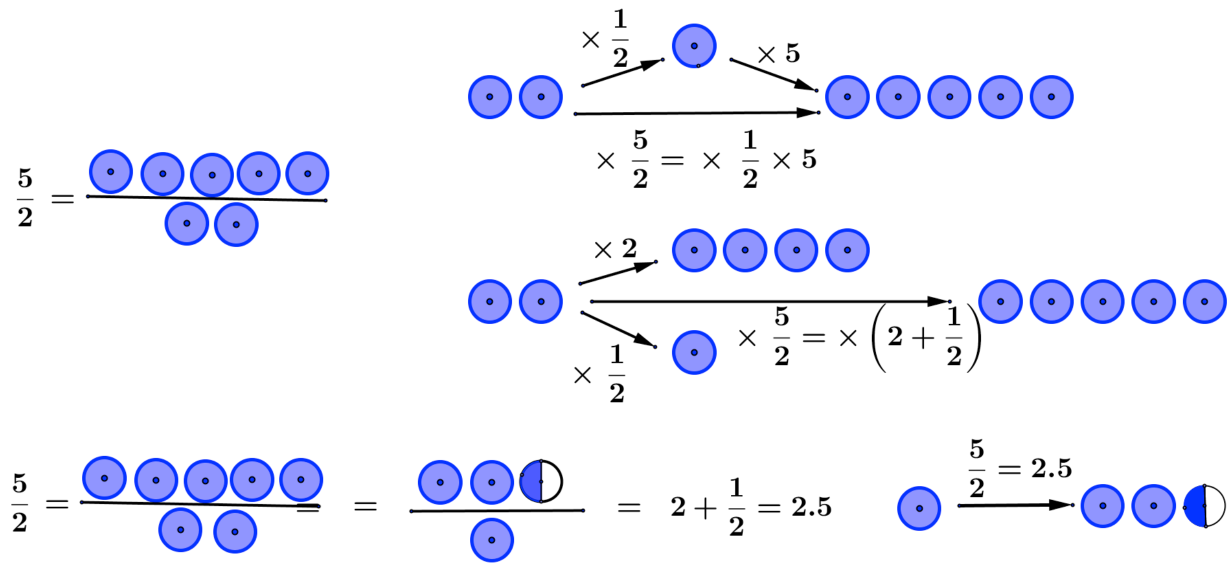
まったく同様に，$\div \dfrac{1}{4}$ は<u>定義により</u> $\times \dfrac{1}{4}$ の逆であり，その役割を果たすのは $\times 4$ だから，$\div \dfrac{1}{4} = \times 4$ となる。

下の”図式”では 働きとしての矢線と，その対象（object）としてのモノを対比させた。

$$
\begin{array}{llll}
\underline{\times 4:} & \underline{\times \frac{1}{4}:} & \underline{\div 4:} & \underline{\div \frac{1}{4}:} \\
1 \times 4 = 4, & 4 \times \frac{1}{4} = 1, & 4 \div 4 = 4 \times \frac{1}{4} = 1, & 1 \div \frac{1}{4} = 1 \times 4 = 4, \\
2 \times 4 = 8, & 8 \times \frac{1}{4} = 2, & 8 \div 4 = 8 \times \frac{1}{4} = 2, & 2 \div \frac{1}{4} = 2 \times 4 = 8, \\
\frac{1}{4} \times 4 = 1, & 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, & 1 \div 4 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 4 = 1
\end{array}
$$



3　分数 $\frac{5}{2}$ の意味



作用するものとその対象の対比を鮮明にするために，数字の使用の他に，円（円盤）を使った。数字 5 の代わりに円を 5 個並べた。分数 $\frac{5}{2}$ は作用素だが，分母の 2と分子の 5 は対象物だから円に置き換えた。作用素 $\frac{5}{2}$ の作用する姿は 矢線 で示した。ここでは $\frac{5}{2}$ でなく $\times\frac{5}{2}$ としている。それは，**そろばん**の「珠と珠への操作の対比」に似ている。

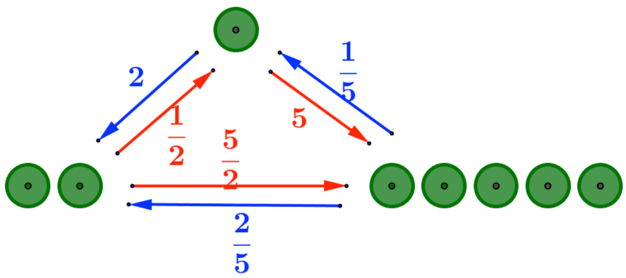
第一の図式は 「二分の五」という唱え方に対応している。

第二の図式は 「商 2，余り 1」という割り算に対応している。「5の中に 2 が二つと半分ある」という包含除でもある。

第三の図式は分数の同一性ルールを適用している。包含除 $\frac{5}{2}$ が等分除 5 ÷ 2 に代わっている。

モノ（対象）としての 分数の意味は 円 を使うことで最も鮮明になる。「これが 1」と宣言するまでもなく，円 は 1 なのである。“欠けたもの＝fraction” でない完全な円が 1 である。¼ は“固有の形”を持っている（直角の扇形という）。

4　$\frac{5}{2}$ と $\frac{2}{5}$ は互いに逆



$$\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}=1,\qquad \frac{5}{2}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{1}{2}\times 5\right)\times\left(\frac{1}{5}\times 2\right)=\frac{1}{2}\times\left(5\times\frac{1}{5}\right)\times 2=\frac{1}{2}\times 2=1,$$
$$\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1,\qquad \frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=\left(\frac{1}{5}\times 2\right)\times\left(\frac{1}{2}\times 5\right)=\frac{1}{5}\times\left(2\times\frac{1}{2}\right)\times 5=\frac{1}{5}\times 5=1$$

ここでは二つの”可換図式”を重ねている。内側に赤で $\frac{5}{2}$ の分解が，外側に青で $\frac{2}{5}$ の分解が示されている。矢線の動きをたどる（chase する）ことが計算の代わりになる。

5　分数係数の量分数

量分数において，分母分子の量は”任意”である。係数が整数であるか，分数であるか，実数であるか，などは本質的な問題ではない。以下の例は質量の線密度の計算である。

「数学教室」2019年12月号の
小林道正：数教協から学んだこと　第7回　分数の割り算
を読んだことがこの項を書くきっかけとなった。そのデータを借用している。

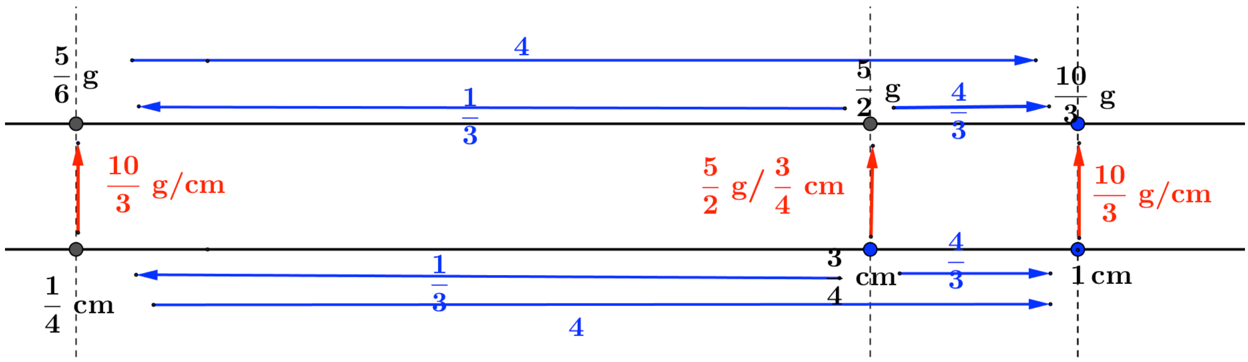
次の6ページに回した計算は，数値に着目すれば “繁分数”ということになる。小林氏の記事には
「教えもしない繁分数を導入するなど，もってのほかである」，「こんな高度の数学を小学校でするべきではないのである」，「このように，学習していない事柄，確認されていない事柄を使っての「説明」は，「説明」とは言えないのである」，「このような指導を続けていると子供の頭脳は正常に発達しない」，「数学の学習には論理以外頼るものがないのであるから，飛躍があってはならないのである」などの　言葉が並んでいる。

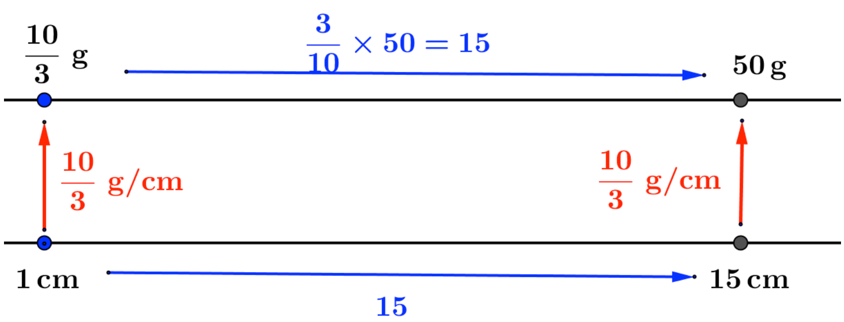
私が冒頭で少し書いたように，教育の本質は「飛躍」である。「教えもしない」ではなく，これから教えるのである。数学の学習には「論理」以外の大事なものがたくさんある。子どもの頭脳は，絶え間ない飛躍で正常に発達する。

$$\text{(0-1)}\qquad \frac{\frac{5}{2}\ \mathrm{g}}{\frac{3}{4}\ \mathrm{cm}} = \frac{\frac{5}{2}\ \mathrm{g} \div \frac{3}{4}}{1\ \mathrm{cm}} = \frac{\frac{5}{2}\ \mathrm{g} \times \frac{4}{3}}{1\ \mathrm{cm}} = \frac{\frac{10}{3}\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{cm}} = \frac{10}{3}\ \mathrm{g/cm}$$

$$\text{(1-1)}\qquad \frac{3}{4}\ \mathrm{cm} \times \frac{10}{3}\ \mathrm{g/cm} = \frac{4}{3}\ \mathrm{cm} \times \frac{\frac{10}{3}\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{cm}} = \frac{10}{3}\ \mathrm{g} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{2}\ \mathrm{g}$$

$$\text{(2-1)}\qquad 50\ \mathrm{g} \div \frac{10}{3}\ \mathrm{g/cm} = 50\ \mathrm{g} \times \frac{1\ \mathrm{cm}}{\frac{10}{3}\ \mathrm{g}} = \left(\frac{50\ \mathrm{g}}{\frac{10}{3}\ \mathrm{g}}\right) \mathrm{cm} = \left(\frac{3}{10} \times 50\right) \mathrm{cm} = 15\ \mathrm{cm}$$





小林氏が $\frac{3}{2}$ g ÷ $\frac{5}{3}$ cm と書いているのは，当然 $\dfrac{\frac{3}{2}\ \mathrm{g}}{\frac{5}{3}\ \mathrm{cm}}$ とすべきものである。日本社会の実際の状況からも，世界の標準という意味でも。

6　指数を使う表現

$\mathrm{s}^{-1} := \dfrac{1}{\mathrm{s}}$,　$(3\,\mathrm{m})^{-1} := \dfrac{1}{3\,\mathrm{m}}$ などの指数表示を使う。 $\dfrac{3\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1} \times 3\,\mathrm{m}$ である。

これまでの計算を指数表記でなぞる。3 m/s の一体感と異なり， s^{-1} と 3 m が独立して動く。“ 代数的” な自動処理の感覚が強まる。s^{-1} は s を消す（1 に変える）。3 m は 1 を 3 m に変える。 $\mathrm{s}^{-1} \times 3\,\mathrm{m}$ 全体では s を 3 mに 置き換える。

　このあたりからは順序の問題を無視できない。

　下の計算は二重になっている。初めはこれまでと同じ“日本式”，次に“国際標準”の順序にしたがっている。

　日本式は合理的で自然。左から右への文章の流れる向きや矢線の向きと，記号を置く順序が一致している（“順を追う” 並びである）。国際標準は記号の順序が逆転している。欧米でも“国際標準”だけが行われているわけではない。引き算は欧米でも右から引く。5 − 2 は 5 から 2 を取り去るのであって，5 から 2 を取り去るのではない。　　矢線に沿う前進・後退としての（日本式の）右からの $\times\,\mathrm{s}^{-1}\,3\,\mathrm{m}$ と $\div\,\mathrm{s}^{-1}\,3\,\mathrm{m}$ のうち，前者は国際標準では左側からの掛け算 $3\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1}\times$ に置き換えられるが，後者は左からの $\mathrm{s}\,(3\,\mathrm{m})^{-1} \times$ に置き換えることになる。

“日本式”順序

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr, "3\,\mathrm{m}"] & \\ 4\,\mathrm{s} \arrow[ur, "\mathrm{s}^{-1}"] \arrow[rr, "\mathrm{s}^{-1}\,(3\,\mathrm{m})"'] & & 4(3\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$$

$$4\,\mathrm{s} \times (\mathrm{s}^{-1}\,3\,\mathrm{m}) = 4(3\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{m}$$

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr, "\mathrm{s}"] & \\ 12\,\mathrm{m} \arrow[ur, "(3\,\mathrm{m})^{-1}"] \arrow[rr, "(3\,\mathrm{m})^{-1}\,\mathrm{s}"'] & & 4\,\mathrm{s} \end{tikzcd}$$

$$12\,\mathrm{m} \times (\mathrm{s}^{-1}\,(3\,\mathrm{m}))^{-1} = 12\,\mathrm{m} \times ((3\,\mathrm{m})^{-1}\,\mathrm{s}) = 4 \times \mathrm{s} = 4\,\mathrm{s}$$

“国際標準”順序

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr, "3\,\mathrm{m}"] & \\ 4\,\mathrm{s} \arrow[ur, "\mathrm{s}^{-1}"] \arrow[rr, "3\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1}"'] & & 4(3\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{m} \end{tikzcd}$$

$$(3\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1})(4\,\mathrm{s}) = (3\,\mathrm{m})4 = 4(3\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{m},$$

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dr, "\mathrm{s}"] & \\ 12\,\mathrm{m} \arrow[ur, "(3\,\mathrm{m})^{-1}"] \arrow[rr, "(3\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1})^{-1}"'] & & 4\,\mathrm{s} \end{tikzcd}$$

$$(3\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1})^{-1}(12\,\mathrm{m}) = \mathrm{s}\,(3\,\mathrm{m})^{-1}\,(12\,\mathrm{m}) = \mathrm{s}(4) = 4\,\mathrm{s}$$

　順序についての二つの原理の衝突に対処する一つの賢い方法は，順序に拘泥しない（順序を無視する）ことである。順序無視の機械的計算でも正しい結果が得られる。

7　国際機関の指針

BIPM (Bureau International des Poids et Mesures, 度量衡国際局)発行の
SI Brochure: The International System of Units (SI　ブロシュア)
に次の記載がある。(ブロシュアは綴じた小冊子のこと。)

When multiplying or dividing quantity symbols any of the following methods may be used:

$$ab,\ a\ b,\ a\cdot b,\ a\times b,\ a/b,\ \frac{a}{b},\ a\ b^{-1}$$

(When multiplying the value of quantities either a multiplication sign × or brackets should be used, not a half-high (centered) dot. When multiplying only the multiplication sign × should be used.)

量の記号の掛け算は $ab,\ a\ b,\ a\cdot b,\ a\times b$ を，割り算は $a/b,\ \frac{a}{b},\ a\ b^{-1}$ を使ってよい。量の値（3 m/s や 4 s のような — 小島）については，掛け算記号 × か brackets（角括弧 [ ] ではなく普通の括弧 parenthesis のつもり？） を用いるべきであり，中黒・を使ってはならない。
4 s × 3 m/s あるいは (4 s)(3 m/s) が許される。数値の場合は記号 × だけ，3 × 4 だけが許される。
日本の割り算 $a \div b$ が選択肢に入っていないことが注目される。
IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry, 国際純粋・応用化学連合） の
文書　　　Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry, third edition
にも同様の記述があり，IUPAP (国際純粋・応用物理学連合) も同じ調子である。

ISO (The International Organization for Standardization, L'Organization Internationale de Normalization，国際標準化機構，頭文字を並べた IOS でもOIN もなくて ISO である）
という組織があり，その文書
ISO 80000-1 Quantities and Units —- Part 1　(自然科学とテクノロジーで使う量と単位)
は , 41ページだが，日本規格協会グループが 20,856円で売っている（悪徳商法）。もちろん買わない。それに準ずる日本の JIS 規格の文書　　Z 80000-1 : 2014 第 1 部　一般
というがある。この HTML文書は，私のパソコン上の出力は極めて劣悪，数式は見るに耐えない。

「量の積は $ab,\ a\ b,\ a\cdot b,\ a\times b$ のどれかを使う。量の商は $\frac{a}{b},\ a/b,\ a\ b^{-1},\ a\cdot b^{-1}$ のどれかを使う。スペースなしの ab^{-1} は許さない。 $(ab)^{-1}$ と紛らわしいから。」と言っている。中黒の $a\cdot b^{-1}$ が追加されている。

ISO のもう一つの文書　ISO 80000-2　(数学記号）では
「割り算記号 ÷ は使ってはならない , "should not be used" 」と言っている。

コメント：

1　国際標準の書き順で，$\frac{a}{b} = a/b = a\ b^{-1}$ である。

2　$c := a/b = a\,b^{-1}$ として，日本式書き順での $a \div c$ に当たる国際標準の左からの割り算は $c^{-1}\,a$ である。　$c^{-1}\,a = (a\,b^{-1})^{-1}a = b\,a^{-1}a = b$

3　(比例の表現である) 量分数の形が自然な速度や密度などは，割り算記号 ÷ でなく分数やそれに準ずるスラッシュの記法 $\dfrac{12\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}}$, $12\,\mathrm{m}/(4\,\mathrm{s})$ を使うべきだから，量の表現方法についての国際機関の指針は当然である。

4　しかし，結果としての量表現の中ではない，計算途中の演算としては，掛け算の逆演算としての割り算は重要である。日本式書き順（小学校教育など）の中での 表現 $a \div c$ を捨てるべきではない。

補足　いくつかの量の指数表現

量の名前，単位名，　単位の順に

振動数　herts　$\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$,　**力**　newton　$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s}^{-2}$,　**圧力**　pascal　$\mathrm{Pa} = \mathrm{kg\,m}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$,

エネルギー(仕事)　joule　$\mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \mathrm{kg\,m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$,　**パワー(仕事率)**　watt　$\mathrm{W} = \mathrm{J/s} = \mathrm{kg\,m}^2\,\mathrm{s}^{-3}$,

電圧　volt $\mathrm{V} = \mathrm{W/A} = \mathrm{kg\,m}^2\,\mathrm{s}^{-3}\,\mathrm{A}^{-1}$,　**電気抵抗** ohm　$\Omega = \mathrm{V/A} = \mathrm{kg\,m}^2\,\mathrm{s}^{-3}\,\mathrm{A}^{-2}$

電荷　coulomb　$\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$,

本題と関係ない補足

単位名は人名に由来していても必ず小文字で書く。人名に由来する単位は大文字で書く。（念のために）単位は立体で書く。数値と単位の間，二つの単位の間には必ずスペースを入れる。

SI 単位でないが SI で許容している単位に体積の L, l がある。

$$1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{l} = 1\,\mathrm{dm}^3 = 10^3\,\mathrm{cm}^3 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

前者は人名に由来しないのに大文字という例外的な存在。l（エル）と 1（イチ）の間の混乱を避けるために原則を曲げた。 L, l の双方が現在は認められている。ℓ や $\boldsymbol{\ell}$ や l は “単位は立体（ローマン，アップライト）” という原則により，SI ではもともと禁止されていた。SI は Le Système International d’Unités　の省略。

一冊の本

ジョセフ・ヘンリック：　文化がヒトを進化させた　—- 人類の繁栄と〈文化-遺伝子革命〉 —-, 白楊社，2019年7月

原著は

Joseph Henrich:　The Secret of our Success —- How Culture is Driving Human Evolution, Domesticating Our Species , and Making Us Smarter —-　Princeton University Press, 2016

冒頭の「知的ツール」などの言い方はこの本を真似ている。人類の ”文化・遺伝子共進化” についての本。