$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "yv^{-1}"] & & Y \\
& Z \arrow[ul, "vu^{-1}"] \arrow[ur, "yu^{-1}"'] \arrow[u, phantom, "\longmapsto"] &
\end{tikzcd}
$$

と考えてよい，ということである（[8] の 91 ページ参照．X は 1 次元でなくてもよい）．

例えば力の単位 N は，基本的には $\mathrm{N} = \mathrm{Jm}^{-1}$ で与えられるが，これを $\mathrm{N} = (\mathrm{Js}^{-1})(\mathrm{ms}^{-1})^{-1} = \mathrm{W}(\mathrm{ms}^{-1})^{-1}$ とすることもできる．つまり，

仕事÷変位＝仕事率÷速度

としてよい．

これら (9)〜(12) にもとずく計算

$$\mathrm{Js}^{-1}\otimes \mathrm{s} = \mathrm{J}, \qquad (\mathrm{W}\otimes \mathrm{s})\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{W},$$
$$\mathrm{m}(\mathrm{ms}^{-1})^{-1} = \mathrm{s}, \qquad (\mathrm{Js}^{-1})(\mathrm{ms}^{-1})^{-1} = \mathrm{Jm}^{-1}$$

などに見られる共通点は，文字の順序など無視して機械的に計算してよいこと，そして s と s^{-1}，m と m^{-1} のように一つの単位とその双対がペアであらわれるときはそれを消してよいという縮約 (contraction) の原理である．

量代数の自立を

こういう，割に細かい議論をした理由は，話をややこしくするためではない（結果としてはややこしくなった?）．実際の計算で，いつも，このような分類のどの型に属するかを見分けるクセをつけよう，と提案しているのではない．反対に，"量自身" の計算は自由に機械的にやっても結果は "正当" だということを実例で示したかったのだ*)．

第1回で述べた『わかる算数』や金原・和田・中村三氏の物理教科書にみられる量自身の（単位込みの）掛算・割算の方式（銀林氏は "数代数" に対する "量代数" という簡潔なうまい言い方をされた）は，明らかに

「大変計算しやすく，わかりやすく，便利だ」

という特徴をもっているが**)，私はそれが単なる "convention" ではなくて，今日の数学の中に正式に取込みうるものであることを強調したい．それはすでに存在する線型代数の計算そのものである——普通の大学の教科書にそれがあるというわけではないが．

第2回で説明したように，量を抽象しても数にはならない．数は量の比に過ぎない．"数代数" とはっきり区別された "量代数" の世界を意識することが重要だと思う．

次回は量の分類のようなことを考える．まず今回の補足として「共変・反変」の区別を説明し，次に量の対称性・非対称性に関する概念である偶種 (espèce paire)・奇種 (espèce impaire) の区別（例えば勾配と密度）について述べる．

*) H. ワイルは，成分の計算でなく，"テンソル自身" で計算する記述法の試みについて「この形式主義のばか騒ぎに対して我々は激しく抗議せざるを得ない」と言っている（[9] の 60 ページ）．私のも「ばか騒ぎ」だろうか？

**) 銀林浩氏はこれについて次のように説明している（[1] の 116 ページ）．「数学の式（表現式）というのは現実の事態をなるべく素直に反映している方がよいに決っています．そうすれば，あとはもとの現実にもどらないでも数学的変形なり処理なりができて，思考の大きな節約になるからです．それを教科書のように「ハダカの数」にしてしまうと，現実から離れた無意味な操作をしないようにするために，始終もとの意味を考えていなければならないということになります．」

文献表

[1] 銀林浩著・毎日新聞学芸部編『お母さんの算数教室』（昭和52年）四季工房刊・発売元は刊々堂出版社

[2] ブルバキ『数学原論・代数 2』東京図書

[3] 齋藤正彦「線型空間と双対性」『現代数学』1971 年 1 月号

[4] Laurent Schwartz "Les Tenseurs" (1975) Hermann

[5] Saunders MacLane "Categories for the Working Mathematician" (1971) Springer-Verlag

[6] J. Dieudonné "Treatise on Analysis" Vol. III (1972) Academic Press

[7]『少年朝日年鑑・社会科統計』昭和52年版　朝日新聞社

[8] 小島順『線型代数』日本放送出版協会

[9] H. ワイル『空間・時間・物質 (1923 年版)』菅原正夫訳　東海大学出版会

（こじま じゅん／早稲田大学）

前回の訂正（誤 ⟶ 正）

68 ページ左段下から 8 行目
を書き直した． ⟶ を書き直した，

72 ページ左段上から 2 行目
とおけば $u = \cdot u$ ⟶ とおけば $u = \cdot x$

72 ページ右段上から 11 行目
別の矢線である． ⟶ 別の矢線である）．

"量の計算" を見直す

5　量の分類

小島 順

一応，量の分類という題をかかげたが，それを言葉どおりにとらないで下さい，とまずお願いする．量の性質と言われるものの中には，それ自身の固有な性質というより，計算の中での位置づけ，他の量とのかかわり方をさしているものが多い．これから述べることは，いくつかの側面について，量を対比させることである．

はじめにベクトル，テンソルの共変性・反変性の対比を考える．それは昔と今のテンソルのとらえ方の対比に続く．後半は空間の向きに関する量の対称性の問題として，奇（捩）形式と偶（通常）形式を対比させた．

共変と反変

共変 (covariant)，反変 (contravariant) というのは，もととなる線型空間 X の枠の取替に対するベクトルの成分の変り方の呼名である．

X の枠を $v = (v_1, \cdots, v_n)$ から $\bar{v} = (\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n)$ に変えるとき，取替の行列を p とすれば

$$\bar{v} = vp \quad （成分に分けて\ \bar{v}_i = \sum_j p_i^j v_j） \qquad (1)$$

であるが，その双対（すなわち測度：$X \longrightarrow R^n$）に移って

$$v^{-1} = p\bar{v}^{-1} \quad （成分に分けて\ v^j = \sum_i p_i^j \bar{v}^i） \qquad (2)$$

となる．

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
R^n \arrow[ur, "v"] & & R^n \arrow[ul, "\bar{v}"'] \arrow[ll, "p"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \ni x \arrow[dl, "v^{-1}"'] \arrow[dr, "\bar{v}^{-1}"] & \\
\xi \in R^n & & R^n \ni \bar{\xi} \arrow[ll, "p"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
x = v\xi &= \sum_j \xi^j v_j \\
&= \bar{v}\bar{\xi} = \sum_i \bar{\xi}^i \bar{v}_i
\end{aligned}
$$

とおくとき，ベクトル $x \in X$ に対する (2) の値をとると

$$\xi = p\bar{\xi} \quad （成分に分けて\ \xi^j = \sum_i p_i^j \bar{\xi}^i） \qquad (3)$$

となる．(3) は X のベクトルの新旧の座標の関係を示す等式であるが，ξ と $\bar{\xi}$，あるいは ξ^j や $\bar{\xi}^i$ を X 上の変数とみれば，つまり X 上の座標関数 $x \longmapsto \xi$，$x \longmapsto \xi^j$ などとみれば，これは (2) と全く同じものである．双対空間 X^* の元 $v^j, \bar{v}^i$ はそれぞれ座標関数 $x \longmapsto \xi^j$, $x \longmapsto \bar{\xi}^i$ のことであった．

(3) と (1) を比較すると，座標の動き（新しい $\bar{\xi}$ から旧い ξ へ）は枠の動き（旧い v から新しい $\bar{v}$ へ）と向きが逆であることがわかる，枠の動きを基準にするので，(3) に示される座標の動きは**反変的**であると言う．同じ向きに直すためには，行列 p の方を逆行列 p^{-1} に変えなければならない．このとき

$$\bar{\xi} = p^{-1}\xi \quad （成分に分けて\ \bar{\xi}^i = \sum_j (p^{-1})_j^i \xi^j） \qquad (4)$$

となる．同じことだが，

$$\bar{v}^{-1} = p^{-1}v^{-1} \quad （成分に分けて\ \bar{v}^i = \sum_j (p^{-1})_j^i v^j） \qquad (5)$$

と言ってもよい．

(5) は (1) と向きが同じ（旧から新へ）で，"傾き" が p に対する p^{-1} のように逆になっているので，互に**反傾** (contragradient, contragredient) と呼ばれている．もっと正確に言うと，v から $\bar{v}$ への X の枠の取替に対して，それから導かれる，$(v^1, \cdots, v^n)$ から $(\bar{v}^1, \cdots, \bar{v}^n)$ への X^* の枠の取替が反傾だと言うのである．

旧い枠 v を固定して考えると，新しい枠 $\bar{v}$ への取替には $v_i \longmapsto \bar{v}_i (i \in \bar{n})$ で定まる X の線型変換 f が対応するが，このとき f の逆の双対 $(f^{-1})^*$ によって $v^i \longmapsto \bar{v}^i (i \in \bar{n})$ となる（7月号 [1] の 19 ページ参照），言いかえると，$(v^1, \cdots, v^n)$ から $(\bar{v}^1, \cdots, \bar{v}^n)$ への X^* の枠の取替には $(f^{-1})^*$ が対応する．ブルバキは，一般に，可逆な線型変換 f に対して $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ を f の反傾と呼んでいるが（[2] の 50 ページ），それはここでの用法と両立する．

多次元の場合の反傾は単に p に対して p^{-1} というだけでなく，(1) の p は右から，(5) の p^{-1} は左からという違いがあるが，1 次元の場合はその区別は不必要だ．

数学セミナー 1977年12月号

1次元の例として X が時間の線型空間だとしよう．単位を秒から 分 $=60$秒 へ 60 倍すれば，ξ 秒 $=\dfrac{\xi}{60}$ 分で，時間の測定値は ξ から $\dfrac{\xi}{60}$ へ $\dfrac{1}{60}$ 倍になるというのがこの場合の反傾の意味である．*)

(2) と (3) が同じものであったように，(1) は双対空間 X^* の座標の動きを示す公式と解釈される．

$a\in X^*$ について

$$a=\alpha v^{-1}=\sum_j \alpha_j v^j$$
$$=\bar{\alpha}\bar{v}^{-1}=\sum_i \bar{\alpha}_i\bar{v}^i$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "a"] & \\
 & \boldsymbol{R} & \\
\boldsymbol{R}^n \arrow[uur, "v"] \arrow[ur, "\alpha"] & & \boldsymbol{R}^n \arrow[uul, "\bar{v}"'] \arrow[ul, "\bar{\alpha}"'] \arrow[ll, "p"]
\end{tikzcd}$$

として，(1) の両辺を a に右から作用させると

$$\bar{\alpha}=\alpha p \quad (\text{成分に分けて } \bar{\alpha}_i=\sum_j p_i^j\alpha_j) \tag{6}$$

が得られるが，$v_j\in X$ は X^* の座標関数 $\sum_j \alpha_j v^j \longmapsto \alpha_j$ のことであるから，α, α_j などを X^* 上の変数と考えた (6) は (1) そのものである．このように α から $\bar{\alpha}$ へという X^* の座標の動きは v から $\bar{v}$ へという X の枠の動きと同じ規則にしたがう．この座標の動きを共変的であるという．

X が時間の線型空間のとき，“時計” $a\in X^*$ が

$$a=\alpha\text{分}^{-1}=\bar{\alpha}\text{時}^{-1}$$

とあらわされるとは，1分を a で測って数値 α が得られ1時間を a で測って数値 $\bar{\alpha}$ が得られるということである（時計は時間を測ることで自らが測られる．つまり，どういう時計であるかがテストされる）．時 $=60$分 に対応して，明らかに $\bar{\alpha}=60\alpha$ である．例えば a が時間を秒で測るストップウォッチ 秒$^{-1}$ ならば，$\alpha=60$ に対して $\bar{\alpha}=60^2$ である．

結局，X の枠の取替に対して，X のベクトルの座標は反変的，X^* のベクトルの座標は共変的である．そして旧座標から新座標への動きは，X と X^* とでは互に反傾である．

今度はテンソル積であらわされる，より複雑な対象に対して，その座標の反変・共変性を調べよう．

まず線型写像の空間 $L(X;Y)=Y\otimes X^*$ について：

X の枠を v から $\bar{v}$ へ，Y の枠を w から $\bar{w}$ へ

$$\bar{v}=vp, \qquad \bar{w}=wq \tag{7}$$

で取替えるとき，$t\in Y\otimes X^*$ の旧・新の表現をそれぞれ $\gamma, \bar{\gamma}$ とすれば $(t=w\gamma v^{-1}=\bar{w}\bar{\gamma}\bar{v}^{-1})$，

$$\bar{\gamma}=q^{-1}\gamma p \quad (\text{成分で } \bar{\gamma}_i^k=\sum_{i,j}(q^{-1})_l^k p_i^j\gamma_j^l) \tag{8}$$

となる．

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}^n \arrow[rrr, "\gamma"] \arrow[dr, "v"] & & & \boldsymbol{R}^m \arrow[dl, "w"'] \\
 & X \arrow[r, "t"] & Y & \\
\boldsymbol{R}^n \arrow[uu, "p"] \arrow[ur, "\bar{v}"'] \arrow[rrr, "\bar{\gamma}"'] & & & \boldsymbol{R}^m \arrow[uu, "q"'] \arrow[ul, "\bar{w}"]
\end{tikzcd}$$

(7) と (8) を見比べると，線型写像の座標は X の枠の取替について共変的，Y のそれについて反変的であることがわかる．

速度の例について考えてみると，m から km $=10^3$m へ，秒から 時 $=60^2$秒 へと単位を変えるとき，速度の測定値は

$$\gamma\,\text{m秒}^{-1}=\frac{60^2}{10^3}\gamma\,\text{km時}^{-1}=3.6\gamma\,\text{km時}^{-1}$$

に見られるように，γ から $\dfrac{60^2}{10^3}\gamma$ へと変わる．

同様に，テンソル積 $\in X\otimes Y$ の座標は X, Y の枠の取替に対してともに反変的，双線型写像 $\in L_2(X, Y; Z)=Z\otimes(X^*\otimes Y^*)$ の座標は X, Y の枠の取替について共変的，Z のそれについて反変的である．要するに，線型空間のテンソル積としての表現で，X^*, Y^* のように双対の形であらわれる X, Y について共変的に，そのままの形であらわれる Z については反変的になるのである．

面積 $\in L\otimes L$ のように，同じ空間二つのテンソル積の場合は二階反変という．長さの単位を p 倍すれば，面積の測定値は $\dfrac{1}{p^2}$ 倍になる．

昔のテンソル・今のテンソル

以上のように，共変，反変というのは座標の動き方についての古くからの呼名であるが，今日の数学の本では，X の元を反変ベクトル，X^* の元を共変ベクトル，例えば $X^*\otimes X^*$ の元を2階共変テンソルというように呼ぶことが多い．しかし，X について言えば，反変的なのは X 上の座標関数 $x\longmapsto\xi^j$ $(j\in\bar{n})$ なのであり，そしてこの座標関数はむしろ双対 X^* の元であることに注意しなければならない．

古典的なベクトルやテンソルは，現代の公理的数学の場合と違って，“それ自身”がそれぞれ固有の線型空間の元として明示されることは決してない．

*) 銀林浩氏も [3] の中の「換算ははたしてやさしいか？」という項で，単位換算を線型代数一般と関連づけて論じている．なお，この本は“意識の表面にあらわれない数学的思考”を分析していて面白い．

古典的なテンソルを現代ふうに説明すると，例えば二階のテンソルの場合，土台となる空間の枠と二重添数族との対 $(v, (\gamma_i^j))$ の全体を同値関係

$$\bar{v}_i=\sum p_i^j v_j,\quad \bar{\gamma}_i^k=\sum (p^{-1})_j^k p_i^l \gamma_l^j \text{ のとき}$$
$$(v, (\gamma_i^j))\sim(\bar{v}, (\bar{\gamma}_i^j))$$

で類別した同値類が X 上の二階混合テンソルであり，対 $(v, (\gamma^{ij}))$ の全体での

$$\bar{\gamma}^{kl}=\sum (p^{-1})_i^k(p^{-1})_j^l\gamma^{ij}$$

で定まる同値関係による同値類が X 上の二階反変テンソルなのである（このように添数の上下の位置でどのような同値関係を考えるかが示される）．

この同値類としてのテンソルが，背後にある“何か”の代用物となる．古典的な数学でも勿論，物理的・幾何学的な存在（量）を扱うのだけれども，それは決して数学の表層に姿をみせることがない．現代の公理的数学がはじめてこの“量そのもの”を直接の対象としたのである．ワイルでさえまだ古い立場に立っているのであり，前回ちょっと触れたように，彼は“テンソル自身”について語る「形式主義の馬鹿騒ぎ」を非難している．

このようにベクトルやテンソルといった概念のとらえ方が過去と現在では違っているのだから，X の元が反変で，X^* の元が共変という機械的な命名は混乱のもとである．

一方，現代の数学では共変・反変という言葉は別の意味で，functor（関手）の二つの種類の呼び方として広く使われている．そして“双対”というのは反変関手である．($X\xrightarrow{f}Y$ に対して $X^*\xleftarrow{f^*}Y^*$ と矢線の向きが反対になる)．上述の，X の座標の反変性もこれと無関係ではない．実際，すでに述べたように，$v_i\longmapsto\bar{v}_i$ と $\bar{v}^i\longmapsto v^i$ は，それぞれ X, X^* の上に互に双対な線型変換を定めるが，これが v から $\bar{v}$ への枠の取替と，(ξ^i) を $(\bar{\xi}^i)$ であらわす座標変換に対応している．こうして，X の枠の取替から座標の取替へと移ることは，“双対”という一つの反変関手によってなされる．

以上の考察をまとめると：

(i) X の元を，座標であらわすのでもないのに，機械的に反変ベクトルと呼ぶのは多少おかしく，(ii) その座標が反変というべきなのだが，座標は双対 X^* に属する．(iii) このように解釈すれば，双対 X^* に関係するものが反変というカテゴリー論的立場と矛盾しない．(iv) しかし普通の本では共変的なものが反変と呼ばれ，反変的なものが共変と呼ばれている．

L. シュヴァルツは私よりもっと大ゲサに次のように言う（[4] の 36 ページ）．

「テンソル成分の変換規則は計算技術としてたしかに便利だが，そこには幾世紀にわたって人類に禍をもたらし続けた歴史的過誤が胚胎していた．それは人々がベクトルでなくて座標の組を扱っていた時期に確立されたので，本来 X に関係することが反変と呼ばれ，X^* に関係することが共変と呼ばれるようになったのだ！！ テンソル積――それは今日，全数学を覆っている――を用いる理論的考察のすべてにおいて，この事態は悲劇的である．…，正しい言い方は，ベクトルの座標が反変ということである．そして，現代の数学では，ベクトルとは単なる座標の組に解消できない一つの存在なのである！ほんとうなら，座標の動きはその逆であることを確認しながらにせよ，X の元を共変テンソルと呼び，X^* の元を反変テンソルと呼ぶべきなのだ」

なお森毅さんは「V の方を共変，V^* の方を反変というのが普通」と『現代数学と数学教育』に書いているが（[5] の 161 ページ），上に述べたように実状はその反対だと思う．

ここでついでに共変・反変ということについての森さんの考えを見ておこう．

「教育の要諦はズボラにあると思っている」，そして「内なる合理主義にズボラの衣をかけゴマカシをする，というのが教育として実践的」[6] と私を批判する森さんは，「ズボラ主義からいうと，n 次元線型空間と $\boldsymbol{R}^n$ をあまり区別したくない」そうである．これは量そのもの $\in X$ とその測度（座標関数）：$X\longrightarrow\boldsymbol{R}^n$ の対比を中心に！ と騒ぎ立てている私とは考えが全然正反対なわけだ．

枠と座標との対の同値類を扱う古典的方法は，テンソル自身を扱う現代の公理的方法と等価であるが，X と $\boldsymbol{R}^n$ を区別しないというのは，そのどちらからも違い．森さんのは座標でやっていながら，それがそのまま量自身でもある（何かを座標で表現しているのでなく）ような感じで，したがって座標の変換則も不必要となるらしい（ズボラ主義！）．彼の『マトリックス』[7] などでは座標変換の話が全くない*)．その限りでは共変・反変という言葉自身が宙に浮く．

もとに戻ると共変・反変について森さんは結局どうでもよいと言っている：

*) それは森さんが一般の n 次元空間でなく1次元空間の直積を考えているからでもある．なお [11] では「座標変換については，よく使う数学者でも，ゆっくり考えないとわからない．」「あまり最初からださない方がよいのではないか」と言っている．

「「数ベクトル」と「ベクトル」の間に段階をおくかどうかで，「共変」と「反変」をどう考えるかが変ってくる．このあたりをやかましくいう「数学者」もいるのだが，ぼくは〈双対〉の区別さえしっかりしていれば，どうでもよいと考えている」

偶種の量と奇種の量

$L(\vec{X};\vec{Y})=\vec{Y}\otimes\vec{X}^*$ の元という形でとらえられる量——それは intensity (強度，内包量) と呼ばれる二階混合テンソルである*)——の例としては，これまでもっぱら速度をとり上げてきた．しかし，intensity という言葉によりふさわしいのは速度よりも**密度** (density) のようなものであるかも知れない．ところが速度と密度というのは数学の形式的な面からみてもかなり異質なものである．

まず速度について考えよう．X を時刻の1次元アフィン，Y を直線とするとき，我々は速度が $L(\vec{X};\vec{Y})$ の元で，$c=\gamma\mathrm{ms}^{-1}$ とあらわされると言ってきた．s とは1秒のことだが，正確に言うと過去から未来への1秒である．そして単位 s によって X の向きが与えられている．もし $\bar{\mathrm{s}}=-\mathrm{s}$ (過去へ向う1秒) を新しい枠にとると，<u>同じ</u> c は $(-\gamma)\mathrm{m}\bar{\mathrm{s}}^{-1}$ とあらわされる: 時間の向きを変えるとその数値が符号をかえる (数値というよりは，s^{-1} の係数 $\gamma\,\mathrm{m}\in\vec{Y}$ が $-\gamma\,\mathrm{m}$ にかわる).

直線 X 上の一点での勾配について考えると，そのことはもっとはっきりする．勾配は実際の高さについてでも温度についてでも何でもかまわないが，ここでは温度の1次元アフィン空間 Y を考えると，一点での勾配は $L(\vec{X};\vec{Y})$ の元として $c=\gamma\deg\mathrm{m}^{-1}$ のようにあらわされる**)．$\vec{X}$ の 1m というのは，例えば東への 1m と西への 1m のように二つあって，それを $\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2$ と書くとき，

$$c=\gamma_i\deg\mathrm{m}_i^{-1}\qquad(i=1,2)$$

となるわけで，$\mathrm{m}_2=-\mathrm{m}_1$ に対応して $\gamma_2=-\gamma_1$ である．X の向きを変えると勾配をあらわす<u>数値は符号を変える</u>.

同じ直線 X 上の密度 (例えば質量分布の線密度) を考えると，これは勾配とは全く様相を異にする．

$\vec{Y}$ を質量 (の変化量) の線型空間とするとき，X 上の一点での密度は $c=\gamma\,\mathrm{gr}\,\mathrm{m}^{-1}$ のようにあらわされる．この場合，m を m_1 と $\mathrm{m}_2=-\mathrm{m}_1$ に区別しても，<u>数値 γ は変らない</u>．m_1 を用いて $c_1=\gamma\,\mathrm{gr}\,\mathrm{m}_1^{-1}$ とあらわされるならば，m_2 を用いて $c_2=\gamma\,\mathrm{gr}\,\mathrm{m}_2^{-1}$ とあらわされる．ところが $\mathrm{m}_2^{-1}=-\mathrm{m}_1^{-1}$ だから，これは $c_2=-c_1$ ということである．

言いかえると，$\vec{X}$ の向き α を指定して密度が $c\in L(\vec{X};\vec{Y})$ であらわされるならば，向き $-\alpha$ に対しては $-c$ であらわされる．結局，密度は対 (c,α) の，同値関係

$$(c,\alpha)\sim(c',\alpha')\Leftrightarrow c=c',\alpha=\alpha' \text{ あるいは } c=-c',\alpha=-\alpha'$$

による同値類であらわされる．この同値類 $\{(c,\alpha),(-c,-\alpha)\}$ を $c\otimes\alpha$ と書くことにしよう．

$\vec{X}$ の二つの向きよりなる集合を $\mathrm{Or}\,\vec{X}$ と書くとき，$c\otimes\alpha$ は，$\tilde{c}(x,\alpha)=c(x)$, $\tilde{c}(x,-\alpha)=-c(x)$ とおくことで，写像

$$\tilde{c}:\vec{X}\times\mathrm{Or}\,\vec{X}\longrightarrow\vec{Y}$$

を定める．逆に $\vec{X}\times\mathrm{Or}\,\vec{X}$ で定義された写像 $\tilde{c}$ が次の条件をみたすとする:

「向き α に対して $c_\alpha:\vec{X}\longrightarrow\vec{Y};\ x\longmapsto\tilde{c}(x,\alpha)$ が線型，かつ $c_{-\alpha}=-c_\alpha$」

このとき $\tilde{c}=c_\alpha\otimes\alpha$ と考えてよい．このような $\tilde{c}$ の全体を $L(\vec{X};\vec{Y})\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X}$ と書く．その元のことを一般に，$\vec{Y}$ に値をとる $\vec{X}$ 上の**奇線型形式** (あるいは**捩線型形式**) という．密度は質量の空間に値をとる $\vec{X}$ 上の捩線型形式である．

密度はもともと $L(\vec{X};\vec{Y})$ の元ではない．それを無理に $L(\vec{X};\vec{Y})$ の元であらわすために向きを指定する必要が生じ，向きを変えると密度が符号を変えるような外見をとるのである．もちろん，密度そのものは向きに無関係な概念である．

密度をもう少し自然に表現するためには，$\vec{X}$ を $\vec{X}\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X}$ に変えればよい．

シュヴァルツ ([4] の 115 ページ) に従って，$\vec{X}$ と $\mathrm{Or}\,\vec{X}$ の "テンソル積" $\vec{X}\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X}$ を次のように定義する*):

$\vec{X}\times\mathrm{Or}\,\vec{X}$ の中で同値関係 $\sim$ を

$$(x,\alpha)\sim(x',\alpha')\Leftrightarrow x=x',\alpha=\alpha' \text{ あるいは } x=-x',\alpha=-\alpha'$$

*) 実際の物理の本でそう呼ばれているということではない．3次元空間 Y での運動の速度は，時間の空間 $\vec{X}$ を R とみなして，Y の反変ベクトルと呼び，力については，消費エネルギーの空間 $\vec{Y}$ を R とみなして，3次元空間 X の共変ベクトルと呼ぶ．

**) Y の点をあらわすときの °C に対して，温度差 (上昇) $\in\vec{Y}$ の単位として deg を使った．これは高橋利衛先生に教わった記号である．

*) 強いて名前をつければ $\vec{X}$ を $\mathrm{Or}\,\vec{X}$ でねじった空間．

で定義し，それによる商集合を G とする．$\vec{X}\times\mathrm{Or}\,\vec{X}$ は線型空間でないが (二本の直線の和集合)，G は線型空間となる．実際，G における (x,α) の同値類を $x\otimes\alpha$ とおくとき，

$$\begin{aligned}x\otimes\alpha+x'\otimes\alpha&=(x+x')\otimes\alpha\\ \lambda(x\otimes\alpha)&=(\lambda x)\otimes\alpha\end{aligned}\tag{1}$$

で演算を定めればよい．

$$\pi:\vec{X}\times\mathrm{Or}\,\vec{X}\longrightarrow G;\ (x,\alpha)\longmapsto x\otimes\alpha$$

は捩線型である．つまり，(1) の他に

$$x\otimes(-\alpha)=-(x\otimes\alpha)$$

が成立つ．

π は次の意味で普遍的である．

「任意の捩線型写像 $\varphi:\vec{X}\times\mathrm{Or}\,\vec{X}\longrightarrow\vec{Y}$ に対して

$$\begin{tikzcd}\vec{X}\times\mathrm{Or}\,\vec{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \vec{Y} \\ G \arrow[ur, dashed, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

が可換であるような線型写像 ϕ が唯一つ存在する」

本来のテンソル積のときの議論 (前回) と全く同様に，この普遍性の条件をみたす組 (G,π) は，いま構成したものに限らないが，それらは互に "同値" であって，その任意の一つについて，$G=\vec{X}\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X}$ と書き，$\pi(x,\alpha)=x\otimes\alpha$ と書く．

$\vec{X}$ から $\vec{Y}$ への捩線型写像全体の線型空間をさきに $L(\vec{X};\vec{Y})\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X}$ と書いたが，上の対応 $\varphi\longmapsto\phi$ によって，それは $L(\vec{X}\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X};\vec{Y})$ と標準的に同型である．密度 $c\otimes\alpha$ に対応する線型写像

$$x\otimes\alpha\longmapsto(c\otimes\alpha)(x,\alpha)=cx$$

を同じ $c\otimes\alpha$ であらわすことにする．密度は $L(\vec{X}\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X};\vec{Y})$ の元と考えるのが日常的な感じ方により近いと思う．

$x\in\vec{X}$ を0でないベクトルとするとき，$\mathrm{Or}\,x$ を x が定める $\vec{X}$ の向きとして，$x\otimes\mathrm{Or}\,x$ を考えると，$(-x)\otimes\mathrm{Or}\,(-x)=x\otimes\mathrm{Or}\,x$ で，これが変位の向きを無視した量となる ("無向線分")．これを $\underline{x}$ と書くことにしよう．$\vec{X}$ の枠を v とするとき，$\underline{v}$ が $\vec{X}\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X}$ の枠となり，$x=\xi v$ ならば $\underline{x}=|\xi|\underline{v}$ である (注意．$x\otimes\mathrm{Or}\,v=\xi\underline{v}$ である).

$\vec{X}$ にはあらかじめ決まった "正の向き" はなく，枠 v の選択が $\vec{X}$ の向きを決めるが，$\underline{v}$ が定める $\vec{X}\otimes\mathrm{Or}\,\vec{X}$ (以後これを $\underline{\vec{X}}$ と書くことにしよう) の向きは v のとり方に依存しない．つまり $\underline{\vec{X}}$ の方は決まった正の向きがある．あるいは，$\vec{X}$ は対称性をもつのに $\underline{\vec{X}}$ は非対称である，と言うこともできる．$x\in\vec{X}$ に対する $\underline{x}$ が $\underline{\vec{X}}$ の正の元である ($\underline{x}>0$)．$x\otimes\mathrm{Or}(-x)=-\underline{x}$ が $\underline{\vec{X}}$ の負の元である．

第2回で "長さの線型空間" を考え，第4回でこれを $\boldsymbol{L}$ と書いたが，$\boldsymbol{L}$ は $\underline{\vec{X}}$ と標準的に同型である．単位 $\mathrm{m}\in\boldsymbol{L}$ に対して，二つの向きの 1m の変位 $\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2$ に対する $\underline{\mathrm{m}_1}=\underline{\mathrm{m}_2}\in\underline{\vec{X}}$ が対応する (これを $\underline{\mathrm{m}}$ と書くことにしよう).

$x\in\vec{X}$ に対して，長さ $\|x\|\in\boldsymbol{L}$ と (これは第2回の記号) $\underline{x}\in\underline{\vec{X}}$ は同一視されることが多い．例えば $x=\xi\mathrm{m}_1$ のとき，$\|x\|=|\xi|\,\mathrm{m}$, $\underline{x}=|\xi|\,\underline{\mathrm{m}}$ である．

ここで再び密度の考察にもどろう．$\vec{X}$ の枠 v を選べば，密度は捩形式として $\tilde{c}=\gamma\,\mathrm{gr}\,v^{-1}\otimes\mathrm{Or}\,v$ と書けるが*)，

$$\tilde{c}:\underline{v}\longmapsto\gamma\,\mathrm{gr}$$

とみなされるから，$\tilde{c}=\gamma\,\mathrm{gr}\,\underline{v}^{-1}$ としてよい．

枠を v から w へ，$w=vp$ で取替えるとき，$\underline{w}=|p|\underline{v}$ だから，密度が $\gamma\,\mathrm{gr}\,\underline{v}^{-1}=\bar{\gamma}\,\mathrm{gr}\,\underline{w}^{-1}$ として，座標の取替の式

$$\bar{\gamma}=|p|\gamma$$

が得られる．p でなくその絶対値 $|p|$ があらわれるところが通常の "共変" と違う．密度は X の枠の取替について**捩共変**である，という言い方をする．

密度の場と積分

直線 X のアフィン枠 (x_0,v) によって X の点は $x=x_0+\xi v$ とあらわされる．このときの座標関数 $x\longmapsto\xi$ の線型部分は v^{-1} だから，各点 x における ξ の微分 $d\xi(x)$ は v^{-1} に一致する．微分形式 $d\xi$ は一定の値 v^{-1} を各点でとる場であって，x からの変位 ξv に対して，測定値 ξ を与える (第3回の微分法の項参照).

このとき，$\underline{d\xi}$ を

$$\underline{d\xi}(x)=\underline{d\xi(x)}=\underline{v}^{-1}:\underline{h}=|\xi|\underline{v}\longmapsto|\xi|$$

で定めると，これは X 上の "**長さの測度**" の場である．数学の中で，普通に "測度" という言葉で思い浮べるのは変位の測度 $d\xi$ よりは長さの測度 $\underline{d\xi}$ の方であろう．$\underline{d\xi}$ という表現では長さの単位 $\underline{v}$ をどう選んだかがかくされているが，実際には $\underline{v}$ によって $\underline{d\xi}$ が定まるのである．

X 上の密度の場，すなわち連続的な質量分布は**捩微分形式** (すなわち $\vec{Y}$ に値をとる測度) $\omega=\gamma\,\mathrm{gr}\,\underline{d\xi}$ であらわされる．各点 x で ω は捩線型形式 $\omega(x)=$

*) 今問題にしていることからすれば，$\gamma\,\mathrm{gr}$ は γ でおきかえても同じである．つまり $\vec{Y}$ と R の違いは無視してよい．

$\gamma(x)\mathrm{gr}\,\underline{v}^{-1}$ を与える*).

すでに述べたように，枠の取替で成分は $\bar{\gamma}=\gamma|p|$ と変わる．ω は X 上の（$\overrightarrow{Y}$ に値をとる）捩共変テンソルの場と言ってもよい．もし X で長さの単位を定めると（内積をきめることにあたる），$p=\pm 1$ だから $\bar{\gamma}=\gamma$ となり，密度は X 上の関数（スカラー場）とみなされる．

de Rham [8] はこのような，成分が変換則 $\bar{\gamma}=|p|\gamma$ に従う微分形式という形で（もちろん彼は n 次元微分多様体の r 次の微分形式について考えているのだが），奇種（espèce impaire）の微分形式を定義した．

向きづけ可能な多様体では向きを固定してしまうと，この概念は通常の（偶種，espèce paire）の微分形式に帰着する．したがって，向きづけ不能な多様体を扱うのでなければ奇種の概念は不必要と言う人もある**)．しかし，密度は空間の向きと全く無関係なのだから，向きを決めて議論するというのはかなり不自然なことである．向きづけが不能な場合というより向きづけに本来関係ない量を扱うための概念が"奇種の量"なのだ．

L. Schwartz は『超函数の理論』（[9] の第9章）で捩形式（forme tordue）の理論を展開している（奇形式は奇数次の形式とまぎらわしいので捩の方がよいと彼は言う）***)．それは X 上の二つの向きの定める二重被覆で定義される微分形式で，X の点に対応する被覆上の二点での値が符号反対となるものとしてとらえられている．さらに [4] では（今の場合で言うと）X 上の $L(\underline{\overrightarrow{X}};\overrightarrow{Y})$ の場というとらえ方に進んでいる．

I を X 上の"可積集合"とするとき，I に乗る総質量は積分

$$\int_I \gamma\,\mathrm{gr}\,\underline{d\xi}=\left(\int_I \gamma\,\underline{d\xi}\right)\mathrm{gr}$$

で与えられる．

座標関数 $x\longmapsto\xi$ による I の像を I' とするとき，$\int_I \gamma\underline{d\xi}$ は普通の積分 $\int_{I'}\gamma(\xi)d\xi$ のことだと定義する．

*) $\omega(x)$ は $\underline{\overrightarrow{X}}$ 上の線型形式だが，$\overrightarrow{X}$ を基準に考えて捩線型という．

**) [8] の訳者の高橋恒郎氏は次のように「あとがき」で述べている．「…初学者にはやや繁雑すぎて理解しにくいようにも思われる．通常は本書で扱う偶形式だけで十分であり，奇形式を扱っている書物は本書以外にはないようである」

***) 彼は次のように言う．「一般に捩形式を使うまいとすることが多い．しかしそのためには，多様体が向きづけられるばかりでなく，向きづけてあることが必要となる．それはかなり窮屈なことだ．それに，捩形式というのは大変扱いやすいものなのだ」（訳書 303 ページのこの部分は全然違う意味に訳されている）．

ただし，後者での ξ は $\boldsymbol{R}$ 上の独立変数（つまり $\xi\longmapsto\xi$），$\gamma(\xi)$ は ξ の関数とみた γ，$d\xi$ は $\boldsymbol{R}$ 上の Lebesgue 測度である．正確に言うと，微分形式 $d\xi$ と $\boldsymbol{R}$ の標準的な向きのテンソル積 $\underline{d\xi}$ が $\boldsymbol{R}$ 上の Lebesgue 測度であるが，これを習慣により，微分形式と同じ $d\xi$ であらわす*)．

別の座標 $x\longmapsto\bar{\xi}$ による I の像を I'' とすれば $\int_{I''}\bar{\gamma}(\bar{\xi})d\bar{\xi}$ を考えることになるが，

$$\bar{\gamma}(\bar{\xi})=\gamma(\xi(\bar{\xi}))|p|=\gamma(\xi(\bar{\xi}))\left|\frac{d\xi}{d\bar{\xi}}\right|$$

だから，"積分の変換公式"によりこの積分は $\int_{I'}\gamma(\xi)d\xi$ に一致する．

こうして，捩形式 $\omega=\gamma\,\mathrm{gr}\,\underline{d\xi}$ は X 上の"**加法的集合関数**"

$$I\longmapsto\omega(I)=\int_I\omega\in\overrightarrow{Y}$$

に拡張される．

$\underline{d\xi}$ 自身はいわば線分の長さの，単位 $\underline{v}$ に関する測度であったが，これが X 上の一般の集合に対する測度

$$I\longmapsto\int_I\underline{d\xi}\in\boldsymbol{R}$$

に拡張されるわけである．もし，"長さ自身"を値とする測度を考えたければ，$\underline{d\xi}$ のかわりに，$\underline{\overrightarrow{X}}$ に値をとる捩形式 $\underline{v}\underline{d\xi}$ をとればよい．

捩微分形式の話ばかりとなったが，はじめに出した一方の例である直線 X 上の温度勾配は，**通常の（偶種の）微分形式で**

$$\omega=\gamma\deg d\xi$$

とあらわされる．

X のコンパクト区間 I での ω の積分は捩形式の場合とちがって，I の向き α を指定することで定まり，向きを変えると積分の符号が変わる．

(x_0, v) を X の枠とするとき，向きづけた区間 (I,α) の始点が $p=x_0+av$，終点が $q=x_0+bv$ ならば

$$\int_{(I,\alpha)}\omega=\int_a^b\gamma(\xi)d\xi$$

で積分が定義される．$\int_a^b\gamma(\xi)d\xi$ は高校でやる積分であって（本当か？），$\int_a^b$ という記号自身がすでに"向きづけた区間での通常の微分形式の積分"を示している．

勾配 ω が温度分布 F から導かれたものとすれば $dF=\omega$ で

*) またシュヴァルツだが，彼はこれを"悔まれる慣習"とし，測度は $|d\xi|$ とでも書く方がましなのだがと言っている（[10] の 101 ページ）．

$$\int_{(I,\alpha)}\omega=F(q)-F(p)$$

となる（《微積分の基本定理》）．

密度のような捩微分形式（＝測度）の積分についてはこれにあたる自然な公式はない．

偶と奇という量の対立，それに対応する積分の型のちがいについて，高校の数学でも，もう少しイメージをはっきりさせた方がよいと思う．

文献表

[1] 小島順「量の計算と線型代数」『数学セミナー』(1977年7月号)

[2] ブルバキ『数学原論・代数』2（線型代数）東京図書

[3] 銀林浩『子どもはどこでつまずくか』(1975年) 国土社

[4] L. Schwartz "Les tenseurs" (1975) Hermann.

[5] 森毅『現代数学と数学教育』(1976) 裳華房

[6] 森毅「線型代数をどう教えるか，どう学ぶか」『数学セミナー』(1977年7月号)

[7] 森毅『マトリックス』(現代数学入門シリーズ・2) (1964) 明治図書

[8] G. de Rham "Variétés différentiables —— Formes, Courants, Formes harmoniques" (1955) Hermann.
訳書：ド・ラーム著 高橋恒郎訳『微分多様体』(1974) 東京図書

[9] L. Schwartz "Théorie des distributions" (1966) Hermann.
訳書：L. シュワルツ著 岩村・石垣・鈴木訳『超函数の理論』岩波書店

[10] シュヴァルツ『解析学』5（外微分法）小島順訳 東京図書

[11] 森毅『講座・教師のための数学入門第4巻幾何編』(1963) 明治図書

（こじま じゅん／早稲田大学）