“量の計算”を見直す

4　量のテンソル積

小島 順

今回は量の掛算，つまり二つの量の積をつくる問題を考えよう．形式的に述べると，X と Y を（有限次元）線型空間とするとき，ベクトル $x \in X$ と $y \in Y$ の積というものをどう定義するか，ということである．

前回述べたように，積という言葉は広く解釈すれば $X \times Y$ の上で定義される双線型写像のことを意味する．例えば，$x \in X$ と $t \in L(X;Z)$ に対しては

$$L(X, Z) \times X \longrightarrow Z;\ (t, x) \longmapsto tx$$

は Z に値をとる積として，はじめから決っている（時間と速度の積のように）．

しかし，これからやろうとしているのは，互に無関係な $x \in X$ と $y \in Y$ に対して（関係があるとしても，それを無視して），そのテンソル積 $x \otimes y$ というものを新しく作る話である．

テンソル積の定義

まず，X, Y のかわりに，その双対 $X^* = L(X;\boldsymbol{R})$，$Y^* = L(Y;\boldsymbol{R})$ を考えると，$a \in X^*$ と $b \in Y^*$ の積は極めて自然に定義できる．a, b は $\boldsymbol{R}$ に値をとる関数だから，値の積によってそのテンソル積 $a \otimes b$ が定義される．つまり $a \otimes b$ は $X \times Y$ 上の実数値関数で

$$a \otimes b : (x, y) \longmapsto (ax)(by) \in \boldsymbol{R}$$

で与えられる．$a \otimes b$ は明らかに双線型である．$X \times Y$ 上の双線型形式の全体の作る線型空間を $L_2(X, Y;\boldsymbol{R})$ と書くならば，$a \otimes b \in L_2(X, Y;\boldsymbol{R})$ となる．

前回の終りで述べたように，双対の双対はもとの空間にもどるから，言いかえると

$$X = (X^*)^*, \qquad Y = (Y^*)^*$$

であるから，$x \in X$ と $y \in Y$ のテンソル積 $x \otimes y$ はもう決ったも同然だ．それは $L_2(X^*, Y^*;\boldsymbol{R})$ の元として，

$$x \otimes y : (a, b) \longmapsto (ax)(bx)$$

で定義される．

明らかに $x \otimes y$ は $X^* \times Y^*$ 上の双線型形式だが，それぱかりでなく

$$\iota : (x, y) \longmapsto x \otimes y;\ X \times Y \longmapsto L_2(X^*, Y^*;\boldsymbol{R})$$

も双線型である．すなわち

$$\begin{cases} (x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y+y') = x \otimes y + x \otimes y' \\ (\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y) \end{cases} \tag{1}$$

が成立つ．

ベクトルのテンソル積に合せて，線型空間のテンソル積も定義する：

$$L_2(X^*, Y^*;\boldsymbol{R}) = X \otimes Y \tag{2}$$

とおく（このとき，当然

$$L_2(X, Y;\boldsymbol{R}) = X^* \otimes Y^* \tag{3}$$

となる）．

X が n 次元，Y が m 次元で，それぞれの枠を $v = (v_1, \cdots, v_n)$，$w = (w_1, \cdots, w_n)$ とするとき，任意の $z \in L_2(X^*, Y^*;\boldsymbol{R})$ は

$$z = \sum_{i,j} \zeta^{ij} v_i \otimes w_j, \qquad \zeta^{ij} = z(v^i, w^j)$$

のように一意的に書ける．このように $L_2(X^*, Y^*;\boldsymbol{R})$ の元は X の元と Y の元のテンソル積そのものではないが，それによって生成される．だから，これを $X \otimes Y$ とあらわすのもそれほど不自然ではあるまい．

$X \otimes Y$ は $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in \bar{n} \times \bar{m}}$ を枠にもつ nm 次元の線型空間で，$x = \sum \xi^i v_i$ と $y = \sum \eta^j w_j$ のとき

$$x \otimes y = \sum_{i,j} \xi^i \eta^j v_i \otimes w_j$$

である．直積 $X \times Y$ が $(n+m)$ 次元で，

$$\{(v_1, 0), \cdots, (v_n, 0), (0, w_1), \cdots, (0, w_m)\}$$

を基底にもつことと対比される．

1次元の場合

X, Y が1次元で，v と w がそれぞれの単位のときに，もう一度繰返して説明しよう．v^{-1}, w^{-1} がこれら単位に関する X, Y の測度であるが，$x = \xi v$，$y = \eta w$ のとき，テンソル積 $x \otimes y = \xi \eta v \otimes w$ は

数学セミナー 1977年 11月号

$$x\otimes y : (v^{-1}, w^{-1}) \longmapsto \xi\eta \tag{4}$$

で与えられる．これは日常の生活で“二つの量の積”を考えるやり方そのものではないだろうか？　我々は，まずそれぞれの量の測度を決めて，つまり測度の対 (v^{-1}, w^{-1}) を決めて，これによる測定値の積 $\xi\eta$ を計算している．測度を変えると測定値の積は(それに複比例して)変るから，量の積は (4) のように考える他はあるまい．

この場合は $X\otimes Y$ の元はすべて分解可能である．言いかえるとテンソル積 $x\otimes y$ の形に書ける．したがって文字どおり $X\otimes Y$ は二つの量の積の 1 次元空間であって，単位のテンソル積 $v\otimes w$ がその単位となる．

例をあげよう．$\boldsymbol{L}$ を長さの線型空間とし*)，その二つのコピーのテンソル積 $\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ を考える．二つの $\boldsymbol{L}$ が長方形のそれぞれヨコ・タテの長さをあらわすものとすれば，$\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ はその面積をあらわすのに使える．

cm を長さの単位とすれば，

$$\mathrm{cm}\otimes\mathrm{cm} : (\mathrm{cm}^{-1}, \mathrm{cm}^{-1}) \longmapsto 1$$

が $\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ の単位となり，ヨコが $x = 20\,\mathrm{cm}$，タテが $y = 30\,\mathrm{cm}$ のとき，テンソル積 $x\otimes y$ は

$$x\otimes y = 20\,\mathrm{cm} \otimes 30\,\mathrm{cm} = 600\,\mathrm{cm}\otimes\mathrm{cm}$$

となる．もし，単位 m を選べば

$$x\otimes y = 0.2\,\mathrm{m} \otimes 0.3\,\mathrm{m} = 0.06\,\mathrm{m}\otimes\mathrm{m}$$

である．測度の対 $(\mathrm{cm}^{-1}, \mathrm{cm}^{-1})$ に対しては数値 600 が，$(\mathrm{m}^{-1}, \mathrm{m}^{-1})$ に対しては数値 0.06 が定まるというのがテンソル積 $x\otimes y$ で，$(x, y) \longmapsto x\otimes y$ が双線型である．

一方，長方形の日常的な意味での面積というものが，ヨコ・タテの長さの対(ツイ)に対して定まり**)，これをかりに $x\circ y$ と書くならば，$(x, y) \longmapsto x\circ y$ が双線型であることを“我々は知っている”．一応，面積の線型空間 $\boldsymbol{A}$ のようなものを作っておくと $x\circ y \in \boldsymbol{A}$ である．$\boldsymbol{A}$ の単位として一辺が 1 m の正方形の面積 $\mathrm{m}\circ\mathrm{m}$ がとれるが，これは平方メートルと呼ばれ，m^2 と書かれる．

$\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{A}$ との間に，$x\otimes y$ を $x\circ y$ に移すような同型が存在し（それは $\mathrm{m}\otimes\mathrm{m} \longmapsto \mathrm{m}^2$ できまる)，$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ と同一視すれば，長さのテンソル積 $(x, y) \longmapsto x\otimes y$ と面積の計算 $(x, y) \longmapsto x\circ y$ は完全に重なる．日常的にやっている

長さ×長さ ＝ 面積

という形の計算は正にこのようなものだ．我々が

$$20\,\mathrm{cm}\times 30\,\mathrm{cm} = 600\,\mathrm{cm}^2$$

と書くとき***)，左辺の × はテンソル積 ⊗ のことであるが，長さのテンソル積はそのまま面積に等しいとみなされている．

こうして，代数的に構成されたテンソル積 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L} \longrightarrow \boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ が面積 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L} \longrightarrow \boldsymbol{A}$ をあらわすのに用いられ，逆に言うと，面積というもとからある幾何学的量が長さのテンソル積を具体化し，あるいはその役を果す．

直積 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}$ は 2 次元だが，それはヨコとタテの長さを独立に考えていることにあたる（まだ掛算をしていない！）．$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}$ の元 (20 cm, 30 cm)，(15 cm, 40 cm)，(30 cm, 30 cm) などはそれぞれ長方形の違う形を表現している（ヨコ・タテの区別をしているから，合同でも形は違う）．これに対して，$\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ の元である 20 cm ⊗ 30 cm，15 cm ⊗ 40 cm，30 cm ⊗ 20 cm はすべて同じ 600 cm⊗cm という面積をあらわし，形はここでは問題とされない（商品の表示などではきまって 20 cm×30 cm，15 cm×40 cm などと書くが，これは直積の元をあらわしている．もし掛算と考え 600 cm^2 と計算してしまうと，どんな形かわからなくなる）．

テンソル積の“一意性”

我々は，まずテンソル積というものを実際に構成したが，今日の数学では，それはもっと機能的に“普遍双線型写像”としてとらえられるのが普通である．すると上の構成は後の意味のテンソル積の“存在”を示すものとなる．この意味のテンソル積は absolute に一つというわけでなく，互に“同値”という形の一意性が成立つ．

これらについて説明する前に，テンソル積の別の構成法を一つだけ考えておこう．

もう一つの構成　直積 $X\times Y$ を基底とする（無限次元）線型空間を Γ とする．Γ は $X\times Y$ の元の“形式的線型結合”の全体よりなり，その 0 でない元は

$$\zeta^1(x_1, y_1)+\zeta^2(x_2, y_2)+\cdots+\zeta^r(x_r, y_r)$$

のような有限和の形をしている $(\zeta^1, \zeta^2, \cdots, \zeta^r \in \boldsymbol{R})$．

$$\iota : (x, y) \longmapsto x\otimes y$$

*)　線型写像をあらわす $L(X\,;\,Y)$ の L とまぎらわしいのでボールド体を使う．我々の世界に一つしかない特定のものという意味で，$\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ と同列に扱いたいということもある．

**)　幾何学的対象としての面積そのものを考えることは後の回にまわす．それは交代積という別の掛算と関係がある．

***)　銀林浩氏によれば（[1] の 117 ページ，209 ページ），小学校の算数教科書ではこのような掛算の式を書くことは禁止されていて，

$20\times 30 = 600$　　答　600 cm^2

と書くことだけが許される．つまり，そうしないと文部省の検定に落ちる．「計算の仕方」のような“生活慣習”の領域にまで行政が恣意的に介入してくるのを許してはならない．第 1 回の終りで「一種の暴力」と書いたけれども，これは“文化”に対して加えられる直接的かつ明白な暴力だと言いなおしたい．

を線型性で Γ 上の線型写像に拡張したものを φ とする．φ の核を Γ_0 とおけば，Γ_0 は

$$\begin{cases} (x+x', y)-(x, y)-(x', y) \\ (x, y+y')-(x, y)-(x, y') \\ (\lambda x, y)-\lambda(x, y) \\ (x, \lambda y)-\lambda(x, y) \end{cases}$$

の形の元のすべてが生成する Γ の部分空間と一致する．φ は明らかに上射だから，商空間 Γ/Γ_0 と $X\otimes Y$ の間の同型 ϕ が φ から導かれ，図式

$$\begin{tikzcd} & X\times Y \arrow[dl, "\iota'"'] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\iota"] & \\ \Gamma/\Gamma_0 \arrow[rr, "\phi"', bend right=0] & \Gamma \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\varphi"] & X\otimes Y \end{tikzcd}$$

は可換となる．ただし π は標準的な射影，それを $X\times Y$ に制限したのが ι' である．

テンソル積の概念の中心は空間 $X\otimes Y$ にあるのではなく矢線 ι の方にある．ところが上の可換図式によれば，$\phi\iota' = \iota$ だから，ϕ で Γ/Γ_0 と $X\otimes Y$ を重ねるとき，ι' と ι が一致する．言いかえると，$\iota' : X\times Y \longrightarrow \Gamma/\Gamma_0$ を ι のかわりにテンソル積と考えてよい（このような ι と ι' はテンソル積として**同値**であるという）．

ブルバキ [2] はこの ι' によってテンソル積を構成する．再双対定理にもとずく第一の構成にくらべて，この第二の構成は無限次元のときや一般の加群 (module) のときも使えるという利点がある．しかし商空間に移る必要があるだけに，複雑で理解がむつかしいのではないかと思う．

「再双対定理をもとにするのは有限次元線型空間だけにしか適用できない便法に過ぎないのではないか」という批判もあるが，私はそれで十分だと思う．“有限次元”は独自の世界を作っているのだから，一般性に義理立てするよりはその範囲内で最も適切なものを選べばよい．私は“日常の計算”とのつながりを基準とした*)．

それはともかくとして，第二の構成の場合は剰余類 $\iota'(x, y) = \pi(x, y)$ を $x\otimes y$ と書くことになる．$x\otimes y$ は対 (x, y) で代表される．混乱を防ぐために，ここで線型空間 $X\times Y$ の中での計算と $X\otimes Y$ での計算の違いを確認しておこう：$X\times Y$ では

$$\begin{cases} (x+x', y+y') = (x, y)+(x', y') \\ (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x, y) \end{cases}$$

であるのに対して（これは Γ での計算ではないことに注意)，$X\otimes Y$ では，(1) により

$$\begin{cases} (x+x')\otimes(y+y') \\ \qquad = x\otimes y+x\otimes y'+x'\otimes y+x'\otimes y' \\ \lambda x\otimes\lambda y = \lambda^2 x\otimes y \end{cases}$$

が成立つ．

普遍的という条件　普遍的な矢線(universal arrow)という概念は今日の数学の全体を広く覆っている**)．今の場合について説明すると：

$X\times Y$ から G への双線型写像 ι が一つ与えられたとき，線型写像 $G \xrightarrow{t} Z$ との合成 $t\iota$ はやはり $X\times Y$ 上の双線型写像である．もし，$X\times Y$ 上の双線型写像が，この一つの ι からすべて，しかも一意的に上の方法で得られるとき，ι は $X\times Y$ 上の双線型写像の中で普遍的であると呼ばれる．言いかえると，任意の Z と任意の双線型写像 $X\times Y \xrightarrow{f} Z$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & Z \\ & G \arrow[u, dashed, "t"'] \end{tikzcd}$$

が可換となる線型写像 t が唯一つ存在するとき，双線型写像 ι は普遍的であると言う．

普遍矢線問題　このような普遍的な矢線 ι を求める問題が普遍矢線問題だが，その解の“存在と一意性”を調べよう．

まず存在については，最初の構成 $X\times Y \xrightarrow{\iota} X\otimes Y$ をもってくればよい．このときの t の一意性は $X\otimes Y$ の基底に対して $t(v_i\otimes w_j) = f(v_i, w_j)$ でなければならぬことから明らかで，あとはこれできまる t について，$t(x\otimes y) = f(x, y)$ を確めればよい．∎

つぎに，**一意性**とは文字通りの一意性ではなく，さきに $X\times Y \xrightarrow{\iota} X\otimes Y$ と $X\times Y \xrightarrow{\iota'} \Gamma/\Gamma_0$ について述べたような，同値なものを同一視した上での一意性であるが，それが成立つ．すなわち：

*)　齋藤正彦氏は以前に，再双対定理について次のように言っている [3]．

「それにしても，これが双対性の基本定理だとはいかにもつまらない，と思うかもしれない．まったくその通りである．有限次元線型空間では，ものごとがすべて自明であり，とくにつまらない」

つまらないほど自明なことならば，なおのことキチンと認識し，利用すべきだと思う．それに盲目であることからくる損失は大きい．

**)　その実例については L. Schwartz [4] の pp. 16—23 を，その歴史については MacLane [5] の p. 76 を参照されたい．

$X\times Y \xrightarrow{\iota} G$ と $X\times Y \xrightarrow{\iota'} G'$ がともに今の普遍問題の解ならば

$$\begin{tikzcd} & G \\ X\times Y \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & \\ & G' \arrow[uu, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

が可換であるような同型 ϕ が存在する.

実際 ι' の普遍性から, $\iota=\phi\iota'$ なる $G' \xrightarrow{\phi} G$ が存在し, ι の普遍性から, $\iota'=\phi'\iota$ なる $G \xrightarrow{\phi'} G'$ が存在する. このとき

$$\iota'=\phi'\phi\iota', \quad \iota=\phi\phi'\iota$$

となるが, 再び ι', ι の普遍性から

$$\phi'\phi=1_{G'}, \quad \phi\phi'=1_G$$

である.

このように, 普遍問題の解 $X\times Y \xrightarrow{\iota} G$ の"同値類"が一意的に決まる. その中のどれもが $X\times Y$ 上のテンソル積と呼ばれ, G は $X\otimes Y$ と, また $\iota(x, y)$ は $x\otimes y$ と書かれる.

absolute に決まらない概念など感じが悪い, という方もあるかも知れないが, 数学上の構成法は殆んどそういうものではないだろうか. 有理数体の実数体への拡張 $\boldsymbol{Q}\to\boldsymbol{R}$ にしても, いろいろなモデルがあって, その同値類としてのみ, 実数体は確定する. 複素数体への拡張 $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ についても同様である.

実例 さきに述べたように, 長方形の面積は二辺の長さのテンソル積のモデルとなる. 普通 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{L}$ と書くことで, ι と ι' が同値であることを示す.

物理の本にあらわれるさまざまな公式

力 = 質量×加速度

電力 = 電圧×電流

などの等号の意味についても同じように考えてよい.

前者について説明すると, 直線上の質点の運動を考えるとき, 物理法則によれば, 質量 m と加速度 a の対 (m, a) に対して, 働く力 f は定まり, $(m, a)\longmapsto f$ は双線型 (複比例) である. したがって f はテンソル積 $m\otimes a$ に比例する ($m\otimes a$ の普遍性!). そればかりでなく $(m, a)\longmapsto f$ と $(m, a)\longmapsto m\otimes a$ は同値で (f を与えると $m\otimes a$ が逆に定まる!), 普通は $f=m\otimes a$ とおく. 単位 kg と $\mathrm{m/s^2}$ に対する力の単位が N (ニュートン) であるが, 上の同一視で $\mathrm{N}=\mathrm{kg}\otimes\mathrm{m/s^2}$ となる. そして

$$\xi\,\mathrm{kg}\otimes\eta\,\mathrm{m/s^2}=\xi\eta\,\mathrm{N}$$

のように計算される*).

複比例と比例 普遍性の条件は

「任意の Z に対して, 線型写像

$$t\longmapsto t\iota : L(X\otimes Y; Z)\longrightarrow L_2(X, Y; Z)$$

が双射である」

ということにちょうど一致する. 普通はこの二つの線型空間を同一視する:

$$L(X\otimes Y; Z)=L_2(X, Y; Z) \tag{5}$$

$X\times Y$ 上の双線型写像は $X\otimes Y$ 上の線型写像と同一視される ($X\times Y$ 上の線型写像とこれらとは何の関係もない).

量の計算でいうと, これは

二つの量に複比例 $\Leftrightarrow$ 二つの量の積に比例

ということだ.

ここで, $Z=\boldsymbol{R}$ とおけば

$$(X\otimes Y)^*=X^*\otimes Y^* \tag{6}$$

となり,

テンソル積の双対は双対のテンソル積

とみなせる.

線型写像とテンソル積

線型写像もテンソル積で表現される. 実際,

$$L(X; Y)=L(X; L(Y^*; \boldsymbol{R}))=L_2(Y^*, X; \boldsymbol{R}) = Y\otimes X^*$$

である.

1次元のとき, v, w を X, Y の単位として, $Y\otimes X^*$ の元 $t=\gamma w\otimes v^{-1}$ は

$$(w^{-1}, v)\longmapsto\gamma;\quad Y^*\times X\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

に等しく, これは

$$v\longmapsto[w^{-1}\longmapsto\gamma];\quad X\longrightarrow(Y^*)^*$$

と分解されるが, $w^{-1}\longmapsto\gamma$ は Y の元 γw とみなされる. 結局, t は前回述べた

$$\gamma wv^{-1}: v\longmapsto\gamma w$$

と一致する. だから, 今後は $\gamma w\otimes v^{-1}$ と書いても γwv^{-1} と書いても同じであるとしよう.

Dieudonné ([6] の Appendix) などでは $L(X; Y)=X^*\otimes Y$ としているが, 書き方としては反対の $Y\otimes X^*$

*) 第2回までの分について, 田村二郎先生からいくつかの貴重な御意見をいただいた. 私がそれから学んだことの一つは,

長さ×長さ = 面積, 質量×加速度 = 力

のように二つの量の積を第三の量といきなり等号で結ぶ前に, "初めの二つに第三の量が複比例する" という幾何学的・物理学的法則がある, ということである. この点をはっきりさせるために, この回の草稿に大幅に手を入れた. しかし, 左辺の積そのものは右辺の量とは無関係にも存在することは念をおしておきたい.

の方が具合がよい. もちろん $X^*\otimes Y$ と $Y\otimes X^*$ は標準的に同型だが, ひとたび

$$L(X; Y)=Y\otimes X^* \tag{7}$$

と定めると, $X^*\otimes Y$ の元の $\gamma v^{-1}\otimes w$ は

$$w^{-1}\longmapsto\gamma v^{-1};\quad Y^*\longmapsto X^*$$

すなわち, 前述の γwv^{-1} の双対写像をあらわす (右から Y^* に作用する γwv^{-1} と言ってもよい).

今までの等式を組合せると ((5), (7), (6) の順)

$$\begin{aligned} L_2(X, Y; Z) &= L(X\otimes Y; Z) \\ &= Z\otimes(X\otimes Y)^* \\ &= Z\otimes(X^*\otimes Y^*) \end{aligned} \tag{8}$$

のように変形される.

例えば, 輸送料金が荷物の重量と輸送距離に(複)比例するような一つの料金体系をかりに考えると, それは双線型写像 $\varphi:(x, y)\longmapsto z$ を定めるが, それはさらに線型写像 $\psi: x\otimes y\longmapsto z$ と同一視される.

$\varphi(\mathrm{t}, \mathrm{km})=\psi(\mathrm{t}\otimes\mathrm{km})=\gamma$ 円 ならば,

$$\varphi=\gamma\,円\,(\mathrm{t}^{-1}\otimes\mathrm{km}^{-1}),\quad \psi=\gamma\,円\,(\mathrm{t}\otimes\mathrm{km})^{-1}$$

と表現され, $x=\xi\,\mathrm{t}$, $y=\eta\,\mathrm{km}$ のとき

$$z=\gamma\,円\,(\mathrm{t}^{-1}\otimes\mathrm{km}^{-1})(\xi\,\mathrm{t}, \eta\,\mathrm{km})=\gamma\xi\eta\,円$$

$$(=\gamma\,円\,(\mathrm{t}\otimes\mathrm{km})^{-1}(\xi\,\mathrm{t}\otimes\eta\,\mathrm{km}))$$

と料金がきまる.

$x\otimes y$ は (x, y) が定める輸送量と呼ばれるもので, $\mathrm{t}\otimes\mathrm{km}$ (トンキロ) がその単位となる*). ψ は輸送量1単位あたりの料金をあらわす.

この場合, 面積や力の例と違って, 重量と距離を与えてもアプリオリには料金は決らない (逆に言うと, 料金を与えても 重量⊗距離 は決らない). 個別的な料金体系 φ を一つ定めると, 重量と距離から料金が決まるが, この φ は数学でいう標準的 (canonical) なものでなく, いつ値上げされるかわからない. これが,

力 = 質量×加速度

と書くのに

料金 = 重量×距離

と書く人がいない理由である.

計算の公式

以上の他に, テンソル積の計算で実際によくあらわれるパターンをまとめておく.

X が1次元ならば

$$(Y\otimes X^*)\otimes X=Y \quad (割って掛ける) \tag{9}$$

$$(Y\otimes X)\otimes X^*=Y \quad (掛けて割る) \tag{10}$$

Y が1次元ならば

$$Y\otimes(Y\otimes X^*)^*=X \quad (割ったもので割る) \tag{11}$$

X と Z が1次元ならば

$$Y\otimes X^*=(Y\otimes Z^*)\otimes(X\otimes Z^*)^* \quad (分母・分子を割る) \tag{12}$$

が言える.

(9) の同型は, v を X の単位として, $t=yv^{-1}\in L(X; Y)=Y\otimes X^*$ と $x=\xi v\in X$ のテンソル積 $yv^{-1}\otimes\xi v$ を本来の積 $(yv^{-1})(\xi v)=\xi y\in Y$ におきかえる.

速度の例で言うと, 速度と時間のテンソル積 $(\gamma\,\mathrm{ms^{-1}})\otimes\xi\,\mathrm{s}$ は変位 $(\gamma\,\mathrm{ms^{-1}})(\xi\,\mathrm{s})=\gamma\xi\,\mathrm{m}$ と同一視される (ここでは秒を s と書いてみた).

(10) の同型は, $y\otimes v\in Y\otimes X$ と $\xi v\in X$ の比 $(y\otimes v)(\xi v)^{-1}$ を $((\xi v)^{-1}v)y=\frac{1}{\xi}y\in Y$ におきかえる.

例えば長方形の面積 $\zeta\,\mathrm{m}\otimes\mathrm{m}$ をヨコの長さ $\xi\,\mathrm{m}$ で割った $(\zeta\,\mathrm{m}\otimes\mathrm{m})(\xi\,\mathrm{m})^{-1}$ はタテの長さ $\frac{\zeta}{\xi}\,\mathrm{m}$ と同一視される (左側の m が残る).

(9), (10) に関連してもう少し例を続けよう.

"電気使用量" というのがある. 東電の領収証をみると「電気ご使用量」となっていて, 単位は「キロワット時」が使われる. これは我々の $\mathrm{kW}\otimes$時 $=3.6\times10^6\,\mathrm{W}\otimes$秒 にあたる. ところで電力 (=仕事率) はエネルギー消費 (=仕事) を時間で割ったもので, $\mathrm{W}=\mathrm{J}\,$秒$^{-1}$ だから (J はジュール), (9) によれば

$$\mathrm{W}\otimes秒=\mathrm{J}\,秒^{-1}\otimes秒=\mathrm{J}$$

であり, 我々はエネルギーを買っているわけである. 逆に電力をもとにして, $\mathrm{W}\otimes$秒 $=\mathrm{J}$ で消費エネルギーの単位を定めるのだと思うと, (10) により

$$\mathrm{J}\,秒^{-1}=(\mathrm{W}\otimes秒)秒^{-1}=\mathrm{W}$$

となり, 代数的には J と W とどちらが先でもよい.

電流と電気量の単位の A (アンペア), C (クーロン) についても事情は全く同じである.

(11) は X と $L(X; Y)$ の Y に関する双対性として前回すでに述べたものをテンソル積として書きなおしただけで, 速度の例で言うと, 変位を速度で割った $(\eta\,\mathrm{m})(\gamma\,\mathrm{ms^{-1}})^{-1}$ を時間 $\left(\frac{1}{\gamma}\mathrm{sm^{-1}}\right)(\eta\,\mathrm{m})=\frac{\eta}{\gamma}\mathrm{s}$ と同一視するのであった.

(12) の意味は, X, Z の単位を v, u とするとき, $yv^{-1}\in Y\otimes X^*$ は $X\otimes Z^*$ の単位 vu^{-1} に左から作用して

$$(yv^{-1})(vu^{-1})=yu^{-1}\in Y\otimes Z^*$$

となるので

$$yv^{-1}=(yu^{-1})(vu^{-1})^{-1}\in(Y\otimes Z^*)\otimes(X\otimes Z^*)^*$$

*) 1974 年度の日本国内貨物輸送量は, 国鉄 516 億トンキロ, トラック 1,308 億トンキロ, 内航船など 1,931 億トンキロとある ([7] の 146 ページ).

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "yv^{-1}"] & & Y \\
& \arrow[phantom, u, "\longmapsto"] & \\
& Z \arrow[ul, "vu^{-1}"] \arrow[ur, "yu^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

と考えてよい，ということである（[8] の 91 ページ参照．X は 1 次元でなくてもよい）．

例えば力の単位 N は，基本的には $\mathrm{N}=\mathrm{Jm}^{-1}$ で与えられるが，これを $\mathrm{N}=(\mathrm{Js}^{-1})(\mathrm{ms}^{-1})^{-1}=\mathrm{W}(\mathrm{ms}^{-1})^{-1}$ とすることもできる．つまり，

仕事÷変位＝仕事率÷速度

としてよい．

これら (9)〜(12) にもとずく計算

$$\mathrm{Js}^{-1}\otimes\mathrm{s}=\mathrm{J},\qquad (\mathrm{W}\otimes\mathrm{s})\mathrm{s}^{-1}=\mathrm{W},$$

$$\mathrm{m}(\mathrm{ms}^{-1})^{-1}=\mathrm{s},\qquad (\mathrm{Js}^{-1})(\mathrm{ms}^{-1})^{-1}=\mathrm{Jm}^{-1}$$

などに見られる共通点は，文字の順序など無視して機械的に計算してよいこと，そして s と s^{-1}，m と m^{-1} のように一つの単位とその双対がペアであらわれるときはそれを消してよいという縮約 (contraction) の原理である．

量代数の自立を

こういう，割に細かい議論をした理由は，話をややこしくするためではない（結果としてはややこしくなった？）．実際の計算で，いつも，このような分類のどの型に属するかを見分けるクセをつけよう，と提案しているのではない．反対に，“量自身”の計算は自由に機械的にやっても結果は“正当”だということを実例で示したかったのだ*)．

第 1 回で述べた『わかる算数』や金原・和田・中村三氏の物理教科書にみられる量自身の（単位込みの）掛算・割算の方式（銀林氏は“数代数”に対する“量代数”という簡潔なうまい言い方をされた）は，明らかに

「大変計算しやすく，わかりやすく，便利だ」

という特徴をもっているが**)，私はそれが単なる“convention”ではなくて，今日の数学の中に正式に取込みうるものであることを強調したい．それはすでに存在する線型代数の計算そのものである——普通の大学の教科書にそれがあるというわけではないが．

第 2 回で説明したように，量を抽象しても数にはならない．数は量の比に過ぎない．“数代数”とはっきり区別された“量代数”の世界を意識することが重要だと思う．

次回は量の分類のようなことを考える．まず今回の補足として「共変・反変」の区別を説明し，次に量の対称性・非対称性に関する概念である偶種 (espèce paire)・奇種 (espèce impaire) の区別（例えば勾配と密度）について述べる．

*) H. ワイルは，成分の計算でなく，“テンソル自身”で計算する記述法の試みについて「この形式主義のばか騒ぎに対して我々は激しく抗議せざるを得ない」と言っている（[9] の 60 ページ）．私のも「ばか騒ぎ」だろうか？

**) 銀林浩氏はこれについて次のように説明している（[1] の 116 ページ）．「数学の式（表現式）というのは現実の事態をなるべく素直に反映している方がよいに決っています．そうすれば，あとはもとの現実にもどらないでも数学的変形なり処理なりができて，思考の大きな節約になるからです．それを教科書のように「ハダカの数」にしてしまうと，現実から離れた無意味な操作をしないようにするために，始終もとの意味を考えていなければならないということになります．」

文献表

[1] 銀林浩著・毎日新聞学芸部編『お母さんの算数教室』（昭和 52 年） 四季工房刊・発売元は刊々堂出版社

[2] ブルバキ『数学原論・代数 2』 東京図書

[3] 齋藤正彦「線型空間と双対性」『現代数学』1971 年 1 月号

[4] Laurent Schwartz “Les Tenseurs” (1975) Hermann

[5] Saunders MacLane “Categories for the Working Mathematician” (1971) Springer-Verlag

[6] J. Dieudonné “Treatise on Analysis” Vol. III (1972) Academic Press

[7]『少年朝日年鑑・社会科統計』昭和 52 年版 朝日新聞社

[8] 小島順『線型代数』日本放送出版協会

[9] H. ワイル『空間・時間・物質（1923 年版）』菅原正夫訳 東海大学出版会

（こじま じゅん／早稲田大学）

前回の訂正（誤⟶正）

68 ページ左段下から 8 行目

を書き直した．⟶ を書き直した，

72 ページ左段上から 2 行目

とおけば $u=\cdot u$ ⟶ とおけば $u=\cdot x$

72 ページ右段上から 11 行目

別の矢線である．⟶ 別の矢線である）．

学校数学のうらおもて

“量の計算”を見直す

5 量の分類

小島 順

一応，量の分類という題をかかげたが，それを言葉どおりにとらないで下さい，とまずお願いする．量の性質と言われるものの中には，それ自身の固有な性質というより，計算の中での位置づけ，他の量とのかかわり方をさしているものが多い．これから述べることは，いくつかの側面について，量を対比させることである．

はじめにベクトル，テンソルの共変性・反変性の対比を考える．それは昔と今のテンソルのとらえ方の対比に続く．後半は空間の向きに関する量の対称性の問題として，奇（捩）形式と偶（通常）形式を対比させた．

共変と反変

共変 (covariant)，反変 (contravariant) というのは，もととなる線型空間 X の枠の取替に対するベクトルの成分の変り方の呼名である．

X の枠を $v=(v_1,\cdots,v_n)$ から $\bar{v}=(\bar{v}_1,\cdots,\bar{v}_n)$ に変えるとき，取替の行列を p とすれば

$$\bar{v}=vp \quad \left(\text{成分に分けて } \bar{v}_i=\sum_j p_i^j v_j\right) \qquad (1)$$

であるが，その双対（すなわち測度：$X\longrightarrow R^n$）に移って

$$v^{-1}=p\bar{v}^{-1} \quad \left(\text{成分に分けて } v^j=\sum_i p_i^j \bar{v}^i\right) \qquad (2)$$

となる．

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
R^n \arrow[ur, "v"] & & R^n \arrow[ul, "\bar{v}"'] \arrow[ll, "p"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& X\ni x \arrow[dl, "v^{-1}"'] \arrow[dr, "\bar{v}^{-1}"] & \\
\xi\in R^n & & R^n\ni\bar{\xi} \arrow[ll, "p"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
x&=v\xi=\sum_j \xi^j v_j\\
&=\bar{v}\bar{\xi}=\sum_i \bar{\xi}^i\bar{v}_i
\end{aligned}
$$

とおくとき，ベクトル $x\in X$ に対する (2) の値をとると

$$\xi=p\bar{\xi} \quad \left(\text{成分に分けて } \xi^j=\sum_i p_i^j\bar{\xi}^i\right) \qquad (3)$$

となる．(3) は X のベクトルの新旧の座標の関係を示す等式であるが，ξ と $\bar{\xi}$，あるいは ξ^j や $\bar{\xi}^i$ を <u>X 上の変数</u>とみれば，つまり X 上の座標関数 $x\longmapsto\xi$，$x\longmapsto\xi^j$ などとみれば，これは (2) と<u>全く同じもの</u>である．双対空間 X^* の元 $v^j,\bar{v}^i$ はそれぞれ座標関数 $x\longmapsto\xi^j$, $x\longmapsto\bar{\xi}^i$ のことであった．

(3) と (1) を比較すると，座標の動き（新しい $\bar{\xi}$ から旧い ξ へ）は枠の動き（旧い v から新しい $\bar{v}$ へ）と向きが逆であることがわかる，枠の動きを基準にするので，(3) に示される座標の動きは**反変的**であると言う．同じ向きに直すためには，行列 p の方を逆行列 p^{-1} に変えなければならない．このとき

$$\bar{\xi}=p^{-1}\xi \quad \left(\text{成分に分けて } \bar{\xi}^i=\sum_j (p^{-1})_j^i\xi^j\right) \qquad (4)$$

となる．同じことだが，

$$\bar{v}^{-1}=p^{-1}v^{-1} \quad \left(\text{成分に分けて } \bar{v}^i=\sum_j (p^{-1})_j^i v^j\right) \qquad (5)$$

と言ってもよい．

(5) は (1) と向きが同じ（旧から新へ）で，“傾き”が p に対する p^{-1} のように逆になっているので，互に**反傾** (contragradient, contragredient) と呼ばれている．もっと正確に言うと，v から $\bar{v}$ への X の枠の取替に対して，それから導かれる，$(v^1,\cdots,v^n)$ から $(\bar{v}^1,\cdots,\bar{v}^n)$ への X^* の枠の取替が反傾だと言うのである．

旧い枠 v を固定して考えると，新しい枠 $\bar{v}$ への取替には $v_i\longmapsto\bar{v}_i\,(i\in\bar{n})$ で定まる X の線型変換 f が対応するが，このとき f の逆の双対 $(f^{-1})^*$ によって $v^i\longmapsto\bar{v}^i\,(i\in\bar{n})$ となる（7 月号 [1] の 19 ページ参照），言いかえると，$(v^1,\cdots,v^n)$ から $(\bar{v}^1,\cdots,\bar{v}^n)$ への X^* の枠の取替には $(f^{-1})^*$ が対応する．ブルバキは，一般に，可逆な線型変換 f に対して $(f^{-1})^*=(f^*)^{-1}$ を f の反傾と呼んでいるが（[2] の 50 ページ），それはここでの用法と両立する．

多次元の場合の反傾は単に p に対して p^{-1} というだけでなく，(1) の p は右から，(5) の p^{-1} は左からという違いがあるが，1 次元の場合はその区別は不必要だ．

数学セミナー 1977年 12月号