学校数学のうらおもて

“量の計算”を見直す

3　正比例と量の割算

小島 順

前回は一種類の量の全体 X が線型空間を作ること，その双対 X^* は量の測度（測定）の線型空間であることを述べた．例えば X が長さの線型空間のとき，任意の長さ x は $x=\xi\mathrm{m}$ と一意的に書けるが，これは“ベクトル” $\mathrm{m}\in X$ の ξ 倍の意味であることに注意されたい．m を矢線（線型写像）

$$\boldsymbol{R}\xrightarrow{\mathrm{m}}X;\quad \xi\longmapsto\xi\mathrm{m}$$

と考えたときの逆

$$\mathrm{m}^{-1}\colon x=\xi\mathrm{m}\longmapsto\xi$$

が長さをメートルで測る測度（モノサシ）で，これが1次元空間 X^* を生成するのであった．

さて，双対の話は中途半端で終ったのだが，それはこの回の最後で補うことにして，一般の線型写像の話を先にしよう．異種類の量の商，つまり割算は線型写像を定める．

線型写像と正比例

線型空間 X の双対 $X^*=L(X;\boldsymbol{R})$ の元は値を $\boldsymbol{R}$ にとる X 上の線型形式，つまり，X から $\boldsymbol{R}$ への線型写像であった．この $\boldsymbol{R}$ を一般の線型空間 Y におきかえた $L(X;Y)$ を考えよう．

$t\in L(X;Y)$ は $t:X\longrightarrow Y$ が線型であること，すなわち

$$t(x+x')=tx+tx'\qquad(x,x'\in X)\tag{1}$$

$$t(\lambda x)=\lambda(tx)\qquad(x\in X,\lambda\in\boldsymbol{R})\tag{2}$$

を意味する．

X が1次元ならば (2) から (1) が，直ちに，殆んど自明な結果としてでる．言いかえると，1次元の場合の線型性は比の保存——x を λ 倍すると t による値も λ 倍——で特徴づけられる．そして，この比の保存は“正比例”と呼ばれている性質そのものである．正比例という日本語がどういう意味をもっているかは，結局，各人がこの言葉で頭の中に呼びおこされるものが何であるかにかかっている．私自身が“正比例”で喚起されるものを反省してみると，それはやはり (1) の加法性（和の保存）でなく，(2) の比の保存である．二，三の人に聞いてみてもそうであった．

多次元になって始めて，加法性が効いてくる．実際，X が n 次元のとき，枠 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in X^n$ をとると，任意のベクトル $x\in X$ は

$$x=\xi^1v_1+\cdots+\xi^nv_n$$

と一意的に書けるが，これは X が n 個の1次元空間 $\boldsymbol{R}v_j=\{\xi^jv_j\mid\xi^j\in\boldsymbol{R}\}$ の直和として

$$X=\boldsymbol{R}v_1\oplus\boldsymbol{R}v_2\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{R}v_n$$

と書けるということで，t が線型なら

$$\begin{aligned}&t(\xi^1v_1+\cdots+\xi^nv_n)\\&=t(\xi^1v_1)+\cdots+t(\xi^nv_n)\qquad((1)\text{ による})\\&=\xi^1(tv_1)+\cdots+\xi^n(tv_n)\qquad((2)\text{ による})\end{aligned}$$

となる．これはまず加法性 (1) によって，線型写像を1次元空間への作用に帰着させ，ついで比の保存 (2) によって1次元の線型写像を処理するという二段がまえになっている．このように一般の多次元の場合でも，1次元の場合の

線型＝比の保存＝正比例

が現実の計算の中で生きていて，有効に使われている．

ところで森毅さんによれば [1]，正比例の基本的性格は加法の保存 (1) で，スカラー倍の保存 (2) はそれから派生する程度ということになっている．まず，t について連続性の条件をおくと (1) から (2) がでる．全く条件がないと“選択公理”のもとでは (2) が成立しない例が作れる．しかし“決定公理”からは (2) が証明できる．こうして 1960 年代（ゲーデル）以後はどちらとも言えなくなった．こういう事情にあるから，(2) は「いちおう別個に考えた方が安全」と森さんは言う．「ただし，この場合も，主は加法の方で r 倍の方は派生的なことは注意しておいた方がよい．」

数学セミナー 1977年10月号

まあ，これはこれで面白いのだが，それによって，上に述べた殆んど自明な事実——1次元の場合，(i) 論理的には (2) から直ちに (1) がでる，(ii) 実際の計算で線型性は (2) としてあらわれる，(iii) 人々の意識する正比例は (2) である——がウヤムヤにならないようにしよう．

正比例の表現

さて，X,Y が線型空間のとき，X,Y にそれぞれ枠を選んで，線型写像 $t:X\longrightarrow Y$ を具体的に表現するという問題を考える．一般有限次元と1次元の場合を平行して考えた方がよくわかるので，まず X を n 次元，Y を m 次元とし，$v=(v_1,\cdots,v_n)$，$w=(w_1,\cdots,w_m)$ をそれぞれの枠とする．すると，前回の終りに述べたように，v,w はそれぞれ可逆な矢線

$$\boldsymbol{R}^n\xrightarrow{v}X,\qquad \boldsymbol{R}^m\xrightarrow{w}Y$$

と思うことができる．そして，図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] & Y \\ \boldsymbol{R}^n \arrow[u, "v"] \arrow[r, "\gamma"] & \boldsymbol{R}^m \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}\qquad\begin{tikzcd} x=\sum\xi^jv_j \arrow[r, mapsto] & y=tx=\sum\eta^iw_i \\ \xi=(\xi^j) \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \eta=(\eta^i) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

が可換であるような行列 $\gamma:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow\boldsymbol{R}^m$ がきまる．γ が枠 v,w に関して t を表現する行列と呼ばれるものだ．行列については7月号の特集 [2] でいろいろ議論があったけれども，$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線型写像はそのまま m 行 n 列の行列とみなし，記号の上の区別はやめる方が簡単である．

上の図式が可換であることを書いた

$$t=w\gamma v^{-1},\qquad\gamma=w^{-1}tv\tag{1}$$

あるいは，それを成分に分けた

$$t=\sum_{i,j}\gamma^i_jw_iv^j,\quad\gamma^i_j=w^itv_j\qquad(i\in\bar{m},j\in\bar{n})\tag{2}$$

のような式を考えよう ($\bar{m}=\{1,2,\cdots,m\}$)．(2) は (1) を書き直した．

$$t=[w_1\cdots\cdots w_m]\begin{bmatrix}\gamma^1_1&\cdots&\gamma^1_n\\\vdots&&\vdots\\\gamma^m_1&\cdots&\gamma^m_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^1\\\vdots\\v^n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma^1_1&\cdots&\gamma^1_n\\\vdots&&\vdots\\\gamma^m_1&\cdots&\gamma^m_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w^1\\\vdots\\w^m\end{bmatrix}t[v_1\cdots\cdots v_n]$$

そのものである (v^j,w^i はそれぞれ $(v^{-1})^j,(w^{-1})^i$ のことである！)．普通，線型代数の本では，線型写像は行列で表現することになっていて，(2) のような，t そのものと等号で結べる表現を使わない（僕の本 [3] が唯一の例外？）．これはちょうど，量を具体的にあらわすのに，単位込みの丸ゴトの量として書くか，あるいは単位を取り去った裸の数値としてあらわすかの対立にあたる（速度をあらわすのに，「$t=24$ m 秒$^{-1}$」と書くか，「単位の秒，m に関して数値 24 であらわされる t」と言うかにあたる）．(1) あるいは (2) の形の表現の方が，単位（枠）がオモテに出て，表現の式自身に含まれているだけに，逆に，枠のことを気にせず，安心して機械的に計算できる．

なお，(2) にあらわれる w_iv^j は，矢線の積（合成）

$$X\xrightarrow{v^j}\boldsymbol{R}\xrightarrow{w_i}Y$$

$$x=\sum\xi^kv_k\longmapsto\xi^j\longmapsto\xi^jw_i$$

のことで，

$$tx=\Big(\sum_{i,j}\gamma^i_jw_iv^j\Big)\Big(\sum_k\xi^kv_k\Big)=\sum_i\Big(\sum_j\gamma^i_j\xi^j\Big)w_i$$

となる．

添数を上下に書き分ける際の原則は，定義域に関する添数は下ツキ，値域に関する添数は上ツキとなっている．その結果，$\sum_{i,j}w_i\gamma^i_jv^j$ に見られるとおり，常に上下にあらわれる添数の対について和をとることになり，大変気楽に，安心して計算できる．

さて，1次元にもどってもその形式は完全に同じで（そうなるように，多次元の場合を作り直したのだから当然だ！），X と Y の枠（単位）v,w を選ぶと線型写像（正比例関数）$t\in L(X;Y)$ は一意的に $t=w\gamma v^{-1}=\gamma wv^{-1}$ とあらわされる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] & Y \\ \boldsymbol{R} \arrow[u, "v"] \arrow[r, "\gamma"] & \boldsymbol{R} \arrow[u, "w"'] \end{tikzcd}\qquad\begin{tikzcd} x=\xi v \arrow[r, mapsto, "t"] \arrow[d, mapsto, "v^{-1}"'] & \gamma\xi w \\ \xi \arrow[r, mapsto, "\gamma"] & \gamma\xi \arrow[u, mapsto, "w"'] \end{tikzcd}$$

ここで，$w\gamma=\gamma w$ などの“可換律”は矢線*) と考えた w が線型（比を保存）ということの表現である．ついでに言うと，スカラー倍を左から書くか，右から書くかという問題があって，有馬氏の本 [5] では，途中で「スカラー倍は ca と書いてきたが，ac と書いた方が合理的な場合もあり，今後は，そのときの都合により ca と書いたり ac と書いたりする」としている．こういうところは左からの ca だけであることに疑問をもたない鈍感な他の教科書に対して有馬氏の本の勝れた点であるが，私に言わせれば，これは表記法の問題とは少し違うと思う．左からのスカラー倍の必然的な結果として「右からのスカラー倍」は発生するのであり，しかも，どの瞬間においても可換律 $ac=ca$ が成立っているということ

*) 矢線という言葉は形としての矢線というだけでなく，線型写像という内容も含めて表わしている．なお，MacLaneなども型射 (morphism) を arrow でとおしている [4]．

が大事なのだ．

例として速度の1次元空間を考えよう．X が時間の線型空間，Y が直線上の変位の1次元線型空間のとき，$L(X;Y)$ の元 t は変位が時間に比例する一つの状況をあらわしているが，これを一つの量とみて速度と呼ぶことができる．単位として，$v=$ 秒，$w=\mathrm{m}$ をとると，速度は $t=\gamma wv^{-1}=\gamma\,\mathrm{m}\,秒^{-1}$ と書ける．もう一度分解して書くと

$$x=\xi\,秒 \xmapsto{秒^{-1}} \xi \xmapsto{\gamma} \gamma\xi \xmapsto{\mathrm{m}} \gamma\xi\,\mathrm{m}$$

となる．中央の矢線 γ は座標（＝測定値）の動きを示し，数値による t の表現となっている．これが多次元の場合の行列表現にあたる．これに対して $t=\gamma\,\mathrm{m}\,秒^{-1}$ というのが量そのものとしての表現である．なお，t の x に対する値 tx は，むしろ対等な二変数 t と x の積と考える．写像の値だから x を括弧に入れて $t(x)$ のように書くという原則（?）に従わない理由の一つはこれである．この方が 速度×時間 と書く日常の計算とも一致する．普通の学校数学では，変数（variable）x に対して関数 t の方は一応 constant とみなされることが多いが，

$$tx=(\gamma\,\mathrm{m}\,秒^{-1})(\xi\,秒)=\gamma\xi\,\mathrm{m}$$

において，t も $L(X;Y)$ を動く variable である．

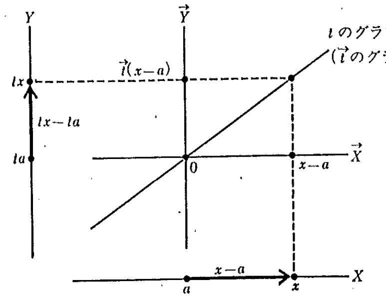
アフィン写像

線型空間とアフィン空間という対比にあわせて，線型写像に対応するのがアフィン写像である．

X と Y をアフィン空間，$\vec{X}$ と $\vec{Y}$ を附随するベクトルの線型空間とするとき，$t:X\longrightarrow Y$ がアフィン写像であるとは，線型写像 $\vec{t}:\vec{X}\longrightarrow\vec{Y}$ が存在して，任意の二点 $x,a\in X$ に対して

$$tx-ta=\vec{t}(x-a)$$

となることを言う．



X が1次元のとき，二点の差 $x-a$ にその値の差 $tx-ta$ が比例する，というのがアフィン写像で，その際の正比例関数が t に附随する $\vec{t}$ である．

例えば，X が時刻のアフィン空間，Y を一つの直線とするとき，点の運動 $t:X\longrightarrow Y$ がアフィンとは，t が Y 上の一つの等速運動であることを意味する．それに附随する線型写像 $\vec{t}:\vec{X}\longrightarrow\vec{Y}$ がその速度ということになる．

t と $\vec{t}$ を図示するには，直積 $X\times Y$ に直積 $\vec{X}\times\vec{Y}$ を重ねる．前者の点 (a,ta) の上に後者の $0=(0,0)$ が重なり，(x,tx) に $(x-a,\vec{t}(x-a))$ が重なる．このとき，t のグラフはそのまま $\vec{t}$ のグラフとなる．$\vec{t}$ を t の**線型部分**と言う．

X に a を原点とする線型構造を入れ，Y に $b=ta$ を原点とする線型構造を入れると，t 自身が線型となり，これが $\vec{t}$ と重なる．つまり

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\theta_a"'] & Y \arrow[d, "\theta_b"] \\ \vec{X} \arrow[r, "\vec{t}"] & \vec{Y} \end{tikzcd}$$

が可換となる．これが t と $\vec{t}$ のグラフを重ねることにあたる．

微分法

等速運動でない一般の運動

$$f:X\longrightarrow Y$$

に対する速度とは何か？　それを考えるのが“微分する”ということにつながる．基本となるアイディアは与えられた写像をアフィン写像で近似することにある．

X,Y を一般の（有限次元）アフィン空間にもどして，点 $a\in X$ において $f:X\longrightarrow Y$ がアフィン写像 $t:X\longrightarrow Y$ に**接する**（tangent）とは，$f(a)=t(a)$ であり，さらに

$$f(x)=t(x)+o(x-a)\qquad(x\to a)$$

であることを言う．o はランダウの小文字の o で，差 $f(x)-t(x)$ が $x-a$ に対して無視できることを示す．t の線型部分 $\vec{t}$ を用いて

$$f(x)=f(a)+\vec{t}(x-a)+o(x-a)\qquad(x\to a)$$

と書いてもよい．

このようなアフィン写像 t が存在するとき，f は点 a で微分可能と言い，線型写像 $\vec{t}$ のことを $f'(a)$ とか $Df(a)$ と書くのであった．呼び方は英語では derivative，スピヴァックの翻訳 [6]，シュヴァルツの翻訳 [7] では導値としている．微分係数でもよいのだが，$f'(a)\in L(\vec{X};\vec{Y})$ は線型写像そのものであることを忘れてはならない．

$f:X\rightarrowtail Y$ を X の中に定義域をもつ関数とし，定義域 $\mathrm{Dom}\,f$ の各点で微分可能とするとき，f の導関数

$$Df:X\rightarrowtail L(\vec{X};\vec{Y})\,;\,x\longmapsto Df(x)$$

がきまる．英語ではこれも同じ derivative である（$\rightarrowtail$ という記号について説明すると，例えば $X=Y=\boldsymbol{R}$ で $f:x\longmapsto\dfrac{1}{x^2-2x-6}$ のとき，$\mathrm{Dom}\,f=\boldsymbol{R}-\{1+\sqrt{7},1-\sqrt{7}\}$ ということが計算すればわかるが，自然な順序としてはそれは後で考えることで，まず我々は f が実一変数 x の実数値関数であることを意識する．それをそのまま記号化したのが $f:\boldsymbol{R}\rightarrowtail\boldsymbol{R}$ である．これは Porteous（前回の文献表参照）にならったもので，彼はこのときの X を f の source と呼んで domain と区別する．なお，ホモロジー代数などで，単射を $\rightarrowtail$，上射を $\twoheadrightarrow$ と書く流儀もあるから注意されたい）．

1次元の場合の例として，もう一度，直線上の点の運動の話にもどろう．

運動 $f:X\rightarrowtail Y$ はそれぞれの（アフィン）枠である $(a;秒)$，$(b;\mathrm{m})$ を選ぶことで，実一変数の実数値関数 φ におきかえられる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "f"] & Y \\ \boldsymbol{R} \arrow[u, "(a;秒)"] \arrow[r, tail, "\varphi"] & \boldsymbol{R} \arrow[u, "(b;\mathrm{m})"'] \end{tikzcd}\qquad \begin{tikzcd} x=a+\xi\,秒 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & y=f(x)=b+\eta\,\mathrm{m} \\ \xi \arrow[r, mapsto] & \eta=\varphi(\xi) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

この図式を点 x で微分することで，同じく可換な図式

$$\begin{tikzcd} \vec{X} \arrow[r, "f'(x)"] & \vec{Y} \\ \boldsymbol{R} \arrow[u, "秒"] \arrow[r, "\varphi'(\xi)"] & \boldsymbol{R} \arrow[u, "\mathrm{m}"'] \end{tikzcd}$$

が得られ，速度 $f'(x)$ は $\mathrm{m}\,\varphi'(\xi)\,秒^{-1}=\varphi'(\xi)\,\mathrm{m}\,秒^{-1}$ に一致する．我々が普通に速度を計算するやり方はこれである．

$f'(x)$ は変位（増分）の比の極限でもある．簡単のため，$b=f(a)$ とし，$f'(a)$ を考えよう*)．

$x=a+\xi$秒 に対して，

$$x-a=\xi\,秒:\ \boldsymbol{R}\longrightarrow X$$

の逆は

$$(x-a)^{-1}=\frac{1}{\xi}\,秒^{-1}:\ X\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

であり，一方

$$\begin{aligned} f(x)-f(a)&=\varphi(\xi)\,\mathrm{m}\\ &=(\varphi(\xi)-\varphi(0))\,\mathrm{m}:\quad \boldsymbol{R}\longrightarrow Y \end{aligned}$$

だから，

$$(f(x)-f(a))(x-a)^{-1}=\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\,\mathrm{m}\,秒^{-1}$$

となる．$x\to a$ として（これは $\vec{X}$ における $x-a$ のノルムを座標 ξ の絶対値 $|\xi|$ で与えれば，$|\xi|\to 0$ に等しい），

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))(x-a)^{-1}=\varphi'(0)\,\mathrm{m}\,秒^{-1}(=f'(a))$$

となる．

ついでに，derivative と密接な関係がある differential（微分）について説明しよう．

Y の元を文字 y であらわすと，y は一応 Y 上の独立変数になるが，写像 $f:X\rightarrowtail Y$ があると，y は X 上の独立変数 x の関数ともなる（f による**引戻し**）．このような X 上の変数としての y の微分 dy とは，点 $x\in X$ とベクトル $h\in\vec{X}$ の対 (x,h)――これは x における**接ベクトル**と呼ばれる――の関数としてきまる新しい変数で

$$dy:(x,h)\longmapsto D(x\mapsto y)(x)\cdot h\,;\ X\times\vec{X}\longrightarrow\vec{Y}$$

で与えられる．例えば，アフィン空間としての X の枠 $(a;v)=(a;v_1,\cdots,v_n)$ を

$$\xi\longmapsto a+\sum_j\xi^j v_j=x\,;\ \boldsymbol{R}^n\longrightarrow X$$

で与えると，X 上の変数としての ξ^j，つまり座標関数 $x\longmapsto\xi^j$ に対して，点 x における ξ^j の導値はその線型部分

$$v^j=(v^{-1})^j:\ \sum h^i v_i\longmapsto h^j$$

に等しいから，微分 $d\xi^j$ は

$$d\xi^j(x,h)=v^j\cdot h=h^j$$

で与えられる．$d\xi^j$ は各点 x ごとに $\vec{X}$ の測度 v^j を与える．むしろ，$d\xi^j$ の方を j-座標の測度と呼ぶことが多いかも知れない．

量の割算について

まず，同種類の量の間の割算，つまり一つの1次元空間 X の中の割算には次の二つがある．

(i) X の二つのベクトル x,y に対して，$y=\lambda x$ となるスカラー λ，すなわち x に対する y の比を求める計算．x が可逆ならば，それは唯一つ定まり，$\lambda=yx^{-1}$ で与えられる．単位 v で測って，$x=\xi v,\ y=\eta v$ のとき，

$$yx^{-1}=(\eta v)(\xi v)^{-1}=(\eta v)\left(\frac{1}{\xi}v^{-1}\right)=\frac{\eta}{\xi}$$

となる．

(ii) スカラー λ とベクトル y に対して，$\lambda x=y$ となるベクトル x を求める計算．λ が可逆（$\lambda\neq 0$）ならばそれは唯一つ定まり，$x=\lambda^{-1}y$ で与えられる．$y=\eta v$

*）アフィン空間にはきまった原点がないから，いつでも最も好都合な位置に原点を設定できる．原点を移さねばならない線型空間の場合より考えやすい．

$$\text{(i)}\quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\lambda = yx^{-1}"] & & X \\ & R \arrow[ul, "x"] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\lambda"] & & X \\ & R \arrow[ul, dashed, "x=\lambda^{-1}y"] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd}$$

のとき, $x = \dfrac{\eta}{\lambda} v$ である.

異種類の量の間の割算もこの二つの延長上にある. X と Y をそれぞれ量の1次元空間としよう.

(iii) 二つのベクトル $x \in X, y \in Y$ を与えたとき, $tx = y$ となる線型写像 $t \in L(X;Y)$ を求める計算. x が可逆ならば, $t = yx^{-1}$ と一意的にきまる. また速度を例にあげると, 時間 $x = \xi$ 秒, 長さ $y = \eta\,\mathrm{m}$ に対して, 速さ t が

$$t = yx^{-1} = (\eta\,\mathrm{m})(\xi\,\text{秒})^{-1}$$
$$= (\eta\,\mathrm{m})\left(\frac{1}{\xi}\,\text{秒}^{-1}\right) = \frac{\eta}{\xi}\,\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1}$$

のように, y を x で割ることで求まる.

(iv) ベクトル $y \in Y$ と線型写像 $t \in L(X;Y)$ に対して $tx = y$ となるベクトル $x \in X$ を求める計算. t が可逆ならば, $x = t^{-1}y$ と一意的にきまる. 長さ $y = \eta\,\mathrm{m}$, 速度 $t = \gamma\,\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1}$ のとき, 時間 x は

$$x = t^{-1}y = (\gamma\,\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1})^{-1}(\eta\,\mathrm{m})$$
$$= \left(\frac{1}{\gamma}\,\text{秒}\,\mathrm{m}^{-1}\right)(\eta\,\mathrm{m}) = \frac{\eta}{\gamma}\,\text{秒}$$

のように, y を t で割ることで得られる*).

$$\text{(iii)}\quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "t = yx^{-1}"] & & Y \\ & R \arrow[ul, "x"] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(iv)}\quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "t"] & & Y \\ & R \arrow[ul, dashed, "x=t^{-1}y"] \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd}$$

(iii), (iv) で $X = Y$ とおいて特殊化したものが, それぞれちょうど (i), (ii) になる. ところで, 小学校の数学教育では, (i) は包含除, (ii) は等分除と呼ばれている. これらの用語は拡張されて (iii), (iv) に対しても使われることが多く, その場合は, (iii) は等分除, (iv) は包含除というふうに逆に呼ばれている. 確かに (iii) は (ii) の計算を, (iv) は (i) の計算を要素として含むけれども少しまぎらわしい. 割算を等分除と包含除に二分しようというのは無理な話なのだ.

双線型写像

一般に, X, Y, Z を線型空間とするとき, 写像

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$$

が双線型であるとは, $y \in Y$ を固定し, $x \in X$ を変数とみた偏写像

$$\varphi(-, y) : X \longrightarrow Z \ ;\ x \longmapsto \varphi(x, y)$$

*) 実は y を t で割る (iii) の型 $x = yt^{-1}$ があるのだが, これは後で説明する.

が線型*), $x \in X$ を固定し, $y \in Y$ を変数とみた偏写像

$$\varphi(x, -) : Y \longrightarrow Z \ ;\ y \longmapsto \varphi(x, y)$$

が線型であることを言う.

線型代数という枠の中での積 (掛け算) とは双線型写像のことと言ってよい. $\varphi(x, y)$ を $x \cdot y$ と書いてみると (単に xy でもよいが), $\varphi : (x, y) \longmapsto x \cdot y$ が双線型という条件は

$$(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y \qquad \text{(分配律)}$$
$$x(y + y') = x \cdot y + x \cdot y' \qquad \text{(分配律)}$$
$$(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y) \qquad \text{(結合律)}$$

となり, ごく自然な演算規則であることがわかる.

前に述べたように, 線型写像 t とベクトル x に対して, 値 tx を二変数 t, x の積と考える. たしかに, 写像

$$L(X;Y) \times X \longrightarrow Y \ ;\ (t, x) \longmapsto tx$$

は双線型である. また, 線型写像の合成

$$L(Y;Z) \times L(X;Y) \longrightarrow L(X;Z) \ ;\ (u, t) \longmapsto ut$$

も双線型で, 上の 線型写像×ベクトル はその特別の場合 ($X = R$) とみることができる.

量の1次元空間の場合, 線型が正比例であるのに対して, 双線型は**複比例**と呼ばれるものにあたる.

非退化というのは, 双線型写像にとって特に重要な概念である. 双線型写像

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$$

が非退化 (non-degenerate) とは

$$y \longmapsto \varphi(-, y) \ ;\ Y \longrightarrow L(X;Z)$$

が単射,

$$x \longmapsto \varphi(x, -) \ ;\ X \longrightarrow L(Y;Z)$$

が単射であることを言う.

X が有限次元のとき, その双対との積

$$\varphi : X^* \times X \longrightarrow \boldsymbol{R} \ ;\ (a, x) \longmapsto ax$$

は非退化である. 実際, $\varphi(a, -)$ は a そのものだから,

$$a \longmapsto \varphi(a, -) \ ;\ X^* \longrightarrow L(X;\boldsymbol{R}) = X^*$$

は恒等写像, したがって単射, 一方, $\varphi(-, x) = \cdot x = 0$ ならば ($\cdot x$ は右からの x のつもり), すべての $a \in X^*$ に対して $ax = 0$ であるが, $x = \sum \xi^j v_j$ のとき, a として順次に $v^1, v^2, \cdots, v^n$ をとれば, $\xi^1 = \xi^2 = \cdots = \xi^n = 0$ となり, $x = 0$ となる. したがって, $x \longmapsto \cdot x$ は単射である. ∎

再双対について

$L(X^*;\boldsymbol{R}) = (X^*)^*$ は X の双対の双対だから X の再双対と呼ばれるが, 単射 $x \longmapsto \cdot x$ が実は X と $(X^*)^*$

*) $(-, y)$ という書き方は, 変数 x がはいる場所が空席になっていることを示す. $(\ \ , y)$ の方が正確かも知れない.

の同型を与える. 実際, $(X^*)^*$ の元 u が, $v^i \longmapsto \xi^i$ ($i \in \bar{n}$) で与えられるとき, $x = \sum \xi^j v_j$ とおけば $u = \cdot u$ となるから, $x \longmapsto \cdot x$ は上射でもある. ∎

このように X の再双対はもとの X にもどることとなり, 双対の概念は X と X^* が互に双対という形に両者の全く対等な関係となる. 双対 (dual) という言葉が, 本来そういう対称性を含んでいる.

X を (代数的) 長さの線型空間としよう. きまった長さ, 例えば $\mathrm{cm} \in X$ は X^{**} の元, つまり X^* の測度として働く. $a \in X^*$ というモノサシで cm を測って, $a \cdot \mathrm{cm} = \alpha$ という数値が得られたら, $a = \alpha\,\mathrm{cm}^{-1}$ で, これは $\alpha^{-1}\,\mathrm{cm}$ を単位とするモノサシ $(\alpha\,\mathrm{cm})^{-1}$ に等しい. つまり, モノサシはきまった長さを測ることで自らが測られる.

あとでテンソル積を定義するのに $X = X^{**}$ という解釈をもとにするので, この一見して人工的な解釈が本当はごく自然なものであることをあらかじめ宣伝しておきたい. そこでもう少し説明を続けると——

長さ $x \in X$ を再双対 X^{**} の元とみることは, 例えば cm を単位とするモノサシ $\mathrm{cm}^{-1} \in X^*$ に対する値 $\mathrm{cm}^{-1} \cdot x$ に注目することに等しい. $\mathrm{cm}^{-1} \cdot x = \xi$ ならば我々は $x = \xi\,\mathrm{cm}$ だと知る. これは日常の量の扱いそのものだ. むしろ,「学校数学」の慣習としては, 私が第1回で批判したように, “長さそのもの” という観念があまりなく, モノサシで測った数値という形のみが表面に出ているわけで, そこでは X そのものはなくて不完全な形の X^{**} だけがある!

再双対の定理を少し一般化して次が言える ([3] の 227 ページ):

$Z \times X \longrightarrow Y$ が非退化で, Y が1次元ならば, 標準的に $Z \cong L(X;Y)$, $X \cong L(Z;Y)$ である (X と Z が Y に関して互に双対と言う).

例えば, $Z = L(X;Y)$ のときにこの型の再双対定理を適用すると, $X \cong L(L(X;Y);Y)$ となる.

これを速度の問題について説明すると, 長さを (iii) の意味で形式的に速度で割った

$$yt^{-1} = (\eta\,\mathrm{m})(\gamma\,\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1})^{-1}$$
$$= \frac{\eta}{\gamma}\,\mathrm{m}(\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1})^{-1} \in L(L(X;Y);Y)$$

が, (iv)の意味の割算 (むしろ, 速度の逆を掛けたもの)

$$t^{-1}y = (\gamma\,\mathrm{m}\,\text{秒}^{-1})^{-1}(\eta\,\mathrm{m}) = \frac{\eta}{\gamma}\,\text{秒} \in X$$

の結果と同一視されると言うことである (ここで yt^{-1} の t^{-1} は t の双対, 言いかえるとベクトルとしての逆 $L(X;Y) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ であり, $t^{-1}y$ の t^{-1} は逆写像 $Y \longrightarrow X$ で, この二つは全然別の矢線である.

このあたりまでくると, テンソル積の概念なしに議論するのが相当不自然になってくる. ここで扱った掛算はすべて割算から派生したものだけであったが, 互に無関係だった異種類の量の積を新しく考えるのがテンソル積である. 次回はテンソル積を導入して量代数の体系を整えよう.

文献表

[1] 森毅『現代数学と数学教育』裳華房

[2] 小島順・齋藤正彦・森毅: 討論「量・線型代数・数学教育」『数学セミナー』(1977 年7月号)

[3] 小島順『線型代数』日本放送出版協会

[4] S. MacLane “Categories for the Working Mathematician” Springer-Verlag

[5] 有馬哲『線型代数入門』東京図書

[6] スピヴァック (齋藤正彦訳)『多変数解析学』東京図書

[7]『シュヴァルツ解析学』2 (小島順訳) 東京図書

(こじま じゅん/早稲田大学)