学校数学のうらおもて

“量の計算”を見直す

2 量の線型空間とその双対

小島 順

前回は教科書の中の量の扱いを調べたが，この回から私自身の，量についての考え方を書く．

話の順序として，まず一つの種類の量——例えば時間なら時間，長さなら長さ——の全体というものを個別に考えよう．それぞれが $\boldsymbol{R}$-線型空間だということをこれから言うのだが，その後で（次回になる）異種類の量の間の関係，その掛け算や割り算について，“線型カテゴリー”の中の話として述べることにする．

線型空間とアフィン空間

$\boldsymbol{R}$-線型空間——この稿では簡単のため，単に線型空間と呼ぶ——とは何か特定の対象の呼名ではなく，今日の数学のごく普通のやり方だが，それは“公理的”に規定される．竹内 [1] のような特殊な本を除いて，その定義はどの線型代数の教科書にもあるから繰返さない*)．要するに線型空間とは“ベクトル”の空間であって，二つのベクトルの和と，ベクトルのスカラー倍（$\boldsymbol{R}$ の元をスカラーと呼ぶ）という二つの演算があり，この演算（算法というべきか）が“線型空間の公理”をみたす．

今，線型空間はベクトルの空間と書いたが，ベクトルとは個々の元の性質についての呼び方ではなく，上述のような，その全体における演算の構造からきまる呼び方，構造の中の存在に対する呼び方である．実は，線型空間の概念が先にあって，その元をベクトルと呼ぶ，というのが正しい．第一回を物理の教科書の検討から始めたので，このことは特に注意しておく必要があると思う．例えば講談社の教科書 [2] では

「力は，速度や加速度と同じように，大きさと向きをひとまとめにして表わす必要がある物理量で，このような量を，ベクトルという．これに対して，長さや時間のように，大きさだけできめられる量をスカラーという」と書かれている．ところが我々は長さや時間を以下に述べるような形でベクトルと呼ぼうとしているのであり，それは今引用したようなベクトルとスカラーの呼び方は一応捨てて白紙に返すということを含んでいるわけだ．

線型空間と密接な関係にあるもう一つの数学的概念に**アフィン空間**というのがある．線型空間が“ベクトル”の空間であるのに対して，アフィン空間は“点”の空間であって，次のように定式化される：

集合 X が（それに附随するベクトルの空間として）線型空間 $\vec{X}$ をもつアフィン空間であるとは，任意の二点 $a, x \in X$ に対して，a, x の差とか，a から x への増分あるいは変位などと呼ばれるベクトル $x-a \in \vec{X}$ が定り（$x-a$ は $\overrightarrow{ax}$ とも書く），写像

$$\theta: X \times X \longrightarrow \vec{X}; \qquad (a, x) \longmapsto x-a$$

が次の条件をみたすことを言う．

(i) $\forall a \in X$ に対し

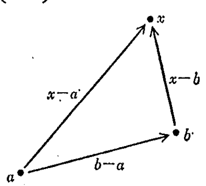
$$\theta_a: X \longrightarrow \vec{X}; \qquad x \longmapsto x-a$$

は双射

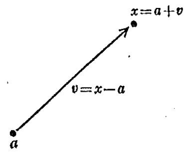
(ii) $\forall a \in X$ に対し，$a-a=0$

(iii) $\forall a, b, x \in X$ に対し

$$(x-b)+(b-a)=x-a$$



(i) により，任意の点 a と任意のベクトル v に対して，$x-a=v$ なる点 x が唯一つ定まる．これを $a+v$ と書き，変換



$$X \longrightarrow X; \qquad a \longmapsto a+v$$

をベクトル v の定める平行移動という．以上はシュヴァルツ[3]，Porteous [4] などにみられるアフィン空間の定義で，私の本 [5] もこれに従ったが，導入の仕方には少し違う流儀もあって，ワイル [6]，ブルバキ [7] などは平行移動そのものをベクトルとみることから出発する．これについては田村 [8] にも手頃な解説がある．実際には，ベクトルは個別的な二点の差としてあらわれることが多く，いつも空間全体の平行移動というわけでもないから，この導入には私は多少の抵抗がある．

いずれにしても，アフィン空間では

点−点 = ベクトル，　点+ベクトル = 点

という演算がある．点+点 という加法は意味をもたないけれども，それに代ってアフィン結合という演算がアフィン空間にはある．これについては後でふれる．

“現実”の空間から線型代数に接近するとき，アフィン空間と線型空間とどちらが先かといえば，まずアフィン空間があるのだという気がする．その二点の差を二つ，$x-a$ と $x'-a'$ をとるとき，それが等しいかどうかを我々は“知っている”．もう少し具体的に言うと，それが，平行で向きが一致し，長さが等しいかどうかを我々は知っている．そこから，同値類として，ベクトルの概念が生ずるわけだ．公理的数学としては，もちろん

線型空間 ⟶ アフィン空間

と進めるのがやりやすいが．

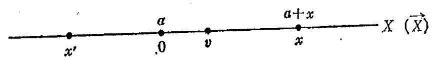
以上の X と $\vec{X}$ は，我々の日常的，直観的概念としての“空間”あるいはその中におかれた“平面”のようなものが何となく決まっていて，それをもとに考えているという要素が強いのだが，“ほんとうの物理的空間”がどういうものかというのはまた全然別の話である．この場合の点とは空間での“位置”のことだが，「私が今ここにいる」というこの位置が1時間後に宇宙のどこにあるか，など答えようがないし，それは“どこか”などという時間に無関係な“位置”の概念がないことにつながる．点の概念がなければ3次元アフィン空間になるわけがない．「明確に“ここ”とはいえないにしても，宇宙空間のどこかに“ある”と考えるのが常識」と田村氏は書いておられるが [8]，どうも私にはそういうものを想像することができない．念のためにいうと，これは相対論を持出す以前の段階での話である．ともかくも，我々がここで“普通の空間”とか“日常の空間”と呼ぶのは，もっと局所的な，地球の表面や，せいぜい太陽系と結びついた空間である．そこでは，我々は絶対的な位置についての感覚をもっていて，アフィン空間とみなせる！

長さの空間とは

直線 X を考えよう．例えば紙の上に書かれた直線——それを両方にどこまでも伸びているものと想定する．どこかで終っていると積極的には思わない程度でもよい．

X は位置を点とみたアフィン空間で，それに伴う線型空間 $\vec{X}$ は1次元である．つまり，任意のゼロでないベクトル v を一つ選んで固定すると，任意のベクトル x は一意的に実数 ξ によって $x=\xi v$ と書ける．

$\vec{X}$ を考えやすくするために次のように工夫する．θ_a は双射だから，θ_a で $\vec{X}$ の線型構造を X に移すと，X は a をゼロとする線型空間となる．これを簡単に，「$a=0$ とおくことで得られる X の線型構造」という．X には固有の原点はなく，したがって本来の線型構造はないのだが，原点を指定していわば人工的に線型空間とするのである．すると $\vec{X}$ は直線 X 上で表現される．つまり，点 a に0と目盛り，ベクトル x に対して $a+x$ なる点に x と目盛る．図では $x=3v$，$x'=-2v$ のつもりである（X と $\vec{X}$ が重ねてある）．



このような v を $\vec{X}$ の枠という．この言い方については [13] を参照されたい．一次元空間には二つの向きがあり，枠の選択が向きをきめる．今考えている“空間”の中の直線の場合，あらかじめ決った正の向きというものはない．そのときどきに一つの向きを指定してそれを正の向きと呼ぶことだけが可能である（例えば目の前におかれた直線について右側を正というように）．このとき $\vec{X}$ の枠 v として正の向きへの 1 m（メートル）の変位を選ぶと，$x=\xi v$ は，$\xi>0$ のときには正の向きの $|\xi|\,\mathrm{m}=\xi\,\mathrm{m}$ の変位を，$\xi<0$ のときには負の向きへの $|\xi|\,\mathrm{m}$ の変位を意味する．

$\vec{X}$ のベクトルには長さというものがある．ベクトル x の長さ $\|x\|$ は，勝手な X の点 a に対して，二点 $a, a+x$ を両端とする区間の長さと言ってもよい．二つのベクトル x, x' に対して，$\|x\|=\|x'\|$ は $x=x'$ または $x=-x'$ を意味する．普通の習慣と違って，$\|x\|$ は数値でなく“長さそのもの”のつもりなので注意されたい（測ら

*) ここで竹内啓の名を出したのは，この本が時代おくれだと言いたいのではない．他の一応は公理的な本と比べて少しも見劣りしない勝れた本である．むしろそのことの中に，他の本の公理的方法といってもそれは形だけで，その真の精神は生きていないことが示されている，と言いたかったのだ．

数学セミナー 1977年9月号

なくても長さはある!). $\vec{X}$ の枠 v に対して, $x=\xi v$ なら $\|x\|=|\xi|\|v\|$ である. ξ の符号が, x と v の向きが同調するかどうかを決める.

ところで, この長さは個々の直線にとじこめられた概念でなく, 地球上に "メートル原器" は一つあれば間に合うことに知られるように, 我々の "普通の空間" は長さという構造をもっていて, 平行な二つの変位についてばかりでなく, 平行でない二つの変位についても長さを比較することを可能としている. こうして「この直線上の1m」という個別的な長さでなく, 抽象的な「単なる1m」というのがあって, それですべてを測っているわけだ. この抽象的な長さを代数化し, 言いかえれば負の長さも含めて, "代数的長さ" の1次元線型空間 L とでも言うべきものを考えることができる. 我々が長さの線型空間と呼んでいるのはこのようなものだ. 長さについて足したり何倍かしたりする日常の計算は, 代数的側面だけをみれば, このような線型空間 L の中の計算と言ってよい.

個別的な直線 X に対して, 変位の空間 $\vec{X}$ は, その向きを指定することで L と標準的に同型となる. 実際, L の一つの正の元, 例えば1m に対して, X 上の「正の向きへの1mの変位」を対応させ, これを全体に拡張することで L から $\vec{X}$ への同型が得られる.

直線でなくても, 鉄道線路のようにまがっていても, その上の二点の距離がきまっていれば——それをどう定義するかはここでの問題ではない——長さの線型空間 L に移して考えることができる.「線路は無限に続くわけではない」というのはまた別のことで, 現実に対する数学上のモデルはいつだってフィクションを含んでいる!

日常的な意味での時刻の全体 T は1次元アフィン空間で, それに伴う線型空間 $\vec{T}$ は時間 (時刻から時刻への経過時間) を元とする空間である. (田村氏は T を時間と呼んでいる [8]. すると空間と時間が対等に並び, 位置∈空間, 時刻∈時間となる. $\vec{T}$ の元としての時間とまぎらわしいが, 言葉としては, 限られた期間か, ずーっと伸びた期間かの違いだけだから同じ時間でもおかしくない. 日本語では時間を測る単位としても秒, 分と並んで時間がある!). ここで言う時間とは向きをもった "代数的時間" である. 時間の空間には特定の,「過去から未来へ」と呼ばれる向きがある. この点が空間におかれた直線などと違う (これも, 物理学における過去-未来とは何かという微妙な問題とは一応別のことである).

こうして, アフィン空間とそれに附随する線型空間という枠組で各種の量がとらえられる.

線型空間と実数体

線型空間 X*) には二つの演算, 和とスカラー倍しかない. つまり, X の二つの元を掛けるという積がない. 時間の積は意味をもたない. 長さの積は面積で (これについては別に議論する予定), X の中の積ではない. 結局 X の中の "四則演算" はなく, これは実数体 R のような体とは全然違うものである.「同じと思えば同じ, 違うと思えば違う」と齋藤さんは言うが [9], たとえ X が1次元であっても R とは構造が違う. R と X が同型という場合も R の方を線型空間と見ているわけで (そうでないと同型という言葉が意味を失う), 1次元線型空間という概念は依然として不可欠なのである.

R の元は倍変換として X に作用する. つまり $\lambda\in R$ は λ 倍するという変換

$$\lambda\colon X\longrightarrow X;\qquad x\longmapsto \lambda x$$

として作用する. 一般に線型空間 X の線型変換の全体 End(X)**) は線型空間であるばかりでなく, 写像の合成を積として環にもなり, 結局, 線型環 (algebra) と呼ばれる代数的構造をもつが, その中で倍変換の全体の部分環は体となり, これが R と体として標準的に同型である. さらに1次元の特性として, この体は End(X) そのものと一致する (線型変換はこの場合, 倍変換以外にはない). こうして, 1次元線型空間に対して, 体 End(X) は実数体 R と標準的に同型となる.

齋藤さんは同じ文章で, 私の本 [5] を引用しながら

「《抽象的な存在である実数体が個別的な End(X) として具体化される》と書かれても, 私には R ほど具体的なものはなく, ぴんとこない」

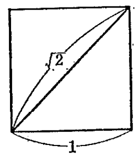
と言っている. しかし, 普通の人にとっては, 実数体はやはり "実数直線" という幾何学的イメージと合さってとらえられているのではないか. そして, 実数直線とは何か. 実数を目盛るから実数直線なので, ただの直線が実数をあらわしているわけではない. 我々は一つの (1次元アフィン空間としての) 直線 X を用意し, まず0を指定して線型空間とする. 次に, 一つの点 (これはベクトルでもある) $v\neq 0$ をとって単位とし, この点に1と目盛り, $\xi\in R$ に対して, v の ξ 倍の ξv という点に ξ と目盛る. 倍変換はこの場合, v に対する値だけできまるから, これは ξ を線型空間 X の倍変換とし

*) これまで使った記号 $\vec{X}$ は, アフィン空間 X に伴うという意味で $\vec{X}$ としたので, 線型空間はいつも → をつけるということではない. シュヴァルツ [3] は線型空間ははじめから $\vec{X}$, その双対が $\overleftarrow{X}$ という使いわけをしている.

**) End は endomorphism の省略

て実現したことになる. だから実数直線を考えるということは, "原点つき直線" X の End(X) を考えることにあたる.

ちょっと話をかえると, 子供にとって最初に出合う無理数の π は, やはり長さの比としてあらわれる. つまり一つの円の直径の π 倍が円周の長さである. "π 倍" という形でだけ我々は実数 π を見ることができる. 次に出てくる無理数 $\sqrt{2}$ も同様で, 正方形の一辺と対角線の長さの比として $\sqrt{2}$ は感覚化される. 図で $\sqrt{2}$ と書いたけ



れども $\sqrt{2}$ という長さがあるわけではない.

もちろん普通の計算の中で我々は実数に直接ふれているが, これはむしろ抽象的なものだから扱いやすくなっているわけで, それを "表現する" には個別的な量の空間で比を考える以外にない.

[5] には「実数の発生学」という項——これはもちろん冗談めかしてつけた題だ——があって, そこで述べたことだが, 概念の発生について振りかえってみると, 実数体 R があって, 次に R-線型空間が, という普通の論理的順序とは逆に, 次のようなものだと思う.

まず個別的な量 (たとえば長さ) の空間 X が, さしあたり和が定義されてアーベル群として意識されるが, それと同時に, 二つの X の元 $v\neq 0$, w の比というものが, w が v の何倍か, という形で定まり, これが X に倍変換を定める. X の元の積ではなく, この倍変換の積が自然に定まり, その全体の体 End(X) ができる. そして X は End(X) を係数体とする線型空間となる. ブルバキは次のように言っているが, これは大体以上のことに合致する [10].

「……エウドクソスにとって, ある与えられた一種類の量は一つの内算法 (加法) を持った体系を形づくっているが, この体系はまた量の比を作用素とする一つの外算法も持っていて, これら量の比の全体はアーベル乗法群をなすと認められている」(村田全訳, 下線は原文のイタリックに対応する. 訳文は多少直した)

それぞれの量の空間 X に対する係数体 End(X) の普遍的な性格が認識されるとき, その抽象としての実数体 R が生れる. ブルバキは次のように続ける.

「これらの比があらゆる種類の量に対する [共通の] 作用域を形づくるということは, 比例式の第4項の存在の公理と同値である. すなわちそのことは, 比 A/A' が与えられ, また [別種の量] B' が与えられたとき, B' と同じ種類の量 B が存在して, $B/B'=A/A'$ となるという公理と同値である. ……

このようにエウドクソスの天才的な考えの結果, それぞれの種類の量から定義される作用域をすべてたがいに同一視することができるようになったわけである. …… こうして組立てられた普遍的な作用域は, ギリシャの数学者にとって, われわれの場合の実数の集合と同等の役割をもっていた」

このように, R が End(X) として表現されるばかりでなく, 元を正せば, はじめに End(X) があってその抽象として R があるとも言えるわけである. 私が言いたいのは, 一種類の量の全体が線型空間だということは, このように, そのことから実数体そのものが導きだされるほどに根元的なことがらだということである. だから, 量の計算の枠組が何よりも線型代数だというのは, この点から言っても当然のことなのだ.

今日の数学の立場から, つまり, でき上った実数論を前提として, 量の測定 (測度) を論じたものにブルバキの『位相』第5章がある [11], また銀林 [12] にもその書き換えがある.

X は全順序集合で結合的な加法があり, ゼロ元0が X の最小元である (つまり X は正の元よりなる). $x<y$ ならば差 $y-x$ が定まり, さらに

(i) $x<y$ なら $x+z<y+z$ $\quad(\forall z\in X)$

(ii) $x>0$ なる x の最小のものがなく

(iii) 有界増加列は上限をもつ (これからアルキメデスの公理がでる)

の三条件がみたされるものとする. このような X がブルバキの考える一種類の量だが, このとき単位 $v\neq 0$ を固定すると, 任意の $x\in X$ に対して, x と v の "比" $f_v(x)\in R_+$ がきまり,

$$f_v\colon X\longrightarrow R_+;\qquad x\longmapsto f_v(x)$$

は真に増加, かつ上射 (したがって双射) であり, $f_v(0)=0$ である. さらに f_v は和を保存する.

この定理により量が実数で測れるわけだが, 任意の $\xi\in R_+$ に対し $f_v(x)=\xi$ なる $x\in X$ が唯一つ決まるから, $\xi v=x$ とおくことで X にスカラー乗法が定まり, さらに

$$f_x(y)f_v(x)=f_v(y)$$

などを確かめ, 一方では X を拡張して "負の量" も考えることで, X は実数体 R が作用する線型空間となる.

量の測度について

測度というと少しモノモノしいが，要するに量を測るということだ．日常語としては測定の方がよいのだが，そうすると，数学用語としての測度とは関係ないことのようにとられそうなので，あえて測度でがんばることにする．測度だって英語で言えば measure で，これは測ること，測る道具（モノサシ），あるいは測った値などすべてをあらわす．

実数論からの量の測度の一つの基礎づけを上に紹介したが，それを踏まえた上で(あるいは素通りしたままで)線型代数の立場から，その形式的な面だけに着目すると，それは単に，量の線型空間 X の**双対空間** X^* を考えるだけのことに過ぎない．

$X^* = L(X;\boldsymbol{R})$ は X から $\boldsymbol{R}$ への線型写像の全体の作る線型空間である．$a \in X^*$ は X 上の線型形式とも呼ばれ，ベクトル $x \in X$ に対して実数値 ax が定まり，

$$a(x_1+x_2) = ax_1+ax_2 \qquad \text{(加法性)} \tag{1}$$

$$a(\lambda x) = \lambda(ax) \qquad \lambda \in \boldsymbol{R} \tag{2}$$

をみたす．とくに X が1次元ならば，(2) から直ちに (1) がでる．したがって線型性の条件 (1), (2) は (2) のスカラー倍の保存だけでよいことに注意する．

X が1次元のとき，単位 v をきめると，v による X のベクトルの測度

$$x = \xi v \longmapsto \xi$$

はあきらかに (2) をみたし，X^* の一つの元を定める．これを v^{-1} と書くことにしよう．任意の $a \in X^*$ は，$av = \alpha$ として $a = \alpha v^{-1}$ となり，X^* は v^{-1} を枠としてやはり1次元である．a は $\alpha^{-1}v$ を単位とする測度 $(\alpha^{-1}v)^{-1}$ に等しい．

例えば X が時間の線型空間のとき，分 = 60秒 を単位とする測度 分$^{-1}$ = (60 秒)$^{-1}$ は $\frac{1}{60}$ 秒$^{-1}$ に等しい．長さでいうと．$\mathrm{cm} = \frac{1}{100}\mathrm{m}$ を単位とする測度 $\mathrm{cm}^{-1} = \left(\frac{1}{100}\mathrm{m}\right)^{-1}$ は $100\,\mathrm{m}^{-1}$ に等しい．単位が大きいと測定値は小さく，単位が小さいと測定値は大きい．

異種の量の商，たとえば速度にあらわれる単位 m/秒 = m 秒$^{-1}$ の秒$^{-1}$とか，密度の単位 $\mathrm{gr/cm^3} = \mathrm{gr(cm^3)^{-1}}$ の $(\mathrm{cm^3})^{-1}$ が，ちょうど今の v^{-1} にあたる．それは後のこととして，この v^{-1} という記法をもっともらしくするためには次のような考察が必要である．

$X^* = L(X;\boldsymbol{R})$ と対にして，X と $\boldsymbol{R}$ を入れかえた $L(\boldsymbol{R};X)$ を考える．こちらは X と等号で結ぶことができる．もっと正確にいうと，7月号 [13] で説明したように X と $L(\boldsymbol{R};X)$ は自然同型である．だから，ベクトル $v \in X$ はいつも矢線 $\boldsymbol{R} \xrightarrow{v} X$ として表現できる．これは単に X と $L(\boldsymbol{R};X)$ を区別するか，区別しないかというような問題とは少し違うのであって，二つがそのまま別にあって，しかも両者の間をいつも自由に移れるということが重要なのだ．

さて，X を1次元にもどすと，

$$\begin{aligned} v \in X \text{ が枠} &\iff v \neq 0 \\ &\iff \boldsymbol{R} \xrightarrow{v} X \text{ が同型（可逆）} \end{aligned}$$

となり，枠つまり単位 $v\colon \xi \longmapsto \xi v$ の逆写像 v^{-1} がちょうど v を単位とする測度の v^{-1} と一致する．

v^{-1} は線型代数の言葉では，v **に双対な** X^* **の枠**と呼ばれるものである．それを説明するために一般の n 次元の場合を考えよう．

X を n 次元とし，n 個のベクトルの組

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \underbrace{X \times X \cdots \times X}_{n\text{個}} = X^n$$

を考える．1次元の場合と全く同様に，n-組 v は矢線 $\boldsymbol{R}^n \xrightarrow{v} X$ と自由に思うことができる．ただし，この場合は，行列記法の $v = [v_1\, v_2 \cdots\cdots v_n]$ を使うことが多い．とくに，v が X の枠であることは，v が矢線つまり線型写像として同型（可逆）であることに等しい．このとき，

$$v^{-1}\colon X \longrightarrow \boldsymbol{R}^n; \qquad x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j v_j \longmapsto \xi = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}$$

の i-成分 $(v^{-1})^i\colon x \longmapsto \xi^i$ は v に関する X 上の i-座標関数，言いかえれば i-座標の測度である．今の文脈からは全くの誤りであるが，$(v^{-1})^i$ を単に v^i と書くことにすれば，行列記法で

$$v^{-1} = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

となり，組 $(v^1, v^2, \cdots, v^n)$ が $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ と双対な X^* の枠となる（つまり $v^i v_j = \delta^i_j$ となる）．双対枠のこの書き方は“テンソル解析”の習慣に従ったもので，この場合，記号上は隠されてしまうが，v に対する逆写像 v^{-1} が 双対 = 測度 という構造は1次元の場合も多次元の場合も本質的に同じである．

双対の話はまだ途中なのだが，あとは次回にまわす．X^* の双対は X で，両者の立場は完全に対等だということを言ってはじめて，双対という言葉が生きてくるわけである．

文献表

[1] 竹内啓『線型数学(補訂版)』培風館（昭和49年）
[2] 大塚明郎他『標準物理 I 改訂版』講談社（昭和51年）

数学の基礎

島内剛一著

定価 2600 円

〈日評数学選書〉

●一般に，数学は論理的であり厳密な学問だと思われている．ところが，その数学の基礎となる数，集合論，論理学などは，直観的に導入され把握されたものが，そのまま用いられることが多い．微分積分学にしても，線型代数学にしても，このままでは砂上の楼閣に過ぎない．たまに，自然数論，実数論，集合論，論理学などが展開されることはあっても，自然数，実数，集合，論理などが単独に取り扱われ，それら相互や，ほかの数学との有機的関係にまで立ち入って論じられることは少ない．本書は，この間隙を埋めるために書かれたものであり，論理に始まり，初等関数の導入によって終る．（本書「まえがき」より）

内容

● 1 論理　対象と命題，証明，論理記号に関する定理，定義
● 2 集合と関数　“等しい”ということ，集合，関数，同型・類別，順序
● 3 自然数　有限と無限，ペアノの公理，列，記数法，有限集合
● 4 順序数と濃度　選出公理，整列集合，順序数，濃度，ツォルンの補題
● 5 整数と有理数　整数，代数系，イデアル，有理数，体，多項式
● 6 実数と複素数 , 実数，複素数，距離空間，位相空間，点列，連続の公理
● 7 初等関数　連続関数，有理関数・指数関数・対数関数・三角関数・逆三角関数
●付録　公理について，論理体系について，素因数分解の一意可能性の初等的な証明

日本評論社

[3] シュヴァルツ『解析学2』(小島順訳) 東京図書
[4] Porteous “Topological Geometry”, Van Nostrand (1969)
[5] 小島順『線型代数』日本放送出版協会 (1976)
[6] H. ワイル『空間・時間・物質』(菅原正夫訳) 東海大学出版会 （他に内山龍雄訳（講談社）がある）
[7] ブルバキ『数学原論・代数2』(第2章: 線型代数) 東京図書
[8] 田村二郎『空間と時間の数学』岩波新書
[9] 齋藤正彦「意味オンチ党宣言」『数学セミナー』1977 年7月号
[10] ブルバキ『数学原論・位相2』(第4章実数・歴史ノート) 東京図書 (他にブルバキ数学史 p. 171 に同文がある)
[11] ブルバキ『数学原論・位相3』(第5章一径数群) 東京図書
[12] 銀林浩『量の世界/構造主義的分析』麦書房
[13] 小島順「量の計算と線型代数」『数学セミナー』1977年7月号

（こじま じゅん／早稲田大学）

〈やさしい？〉の解答

（問題 112 ページ）

[1] $\displaystyle\prod_{n=1}^{44}(1+\tan n^\circ)$

$$=\prod_{n=1}^{22}(1+\tan n^\circ)(1+\tan(45^\circ-n^\circ))$$

$$=\prod_{n=1}^{22}2=2^{22}.$$

[2] $x=\dfrac{b}{ay}$ と変換すると，$a, b>0$ なので

$$\int_0^\infty \sin\left(ax-\frac{b}{x}\right)\cdot\frac{dx}{x}$$

$$=-\int_\infty^0 \sin\left(\frac{b}{y}-ay\right)\cdot\frac{b}{ay^2}\cdot\frac{ay}{b}dy$$

$$=-\int_0^\infty \sin\left(ay-\frac{b}{y}\right)\frac{dy}{y}.$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty \sin\left(ax-\frac{b}{x}\right)\frac{dx}{x}=0.$$

（ただし，無限積分が存在することは証明せずに用いた．）

（鹿野 健／岡山大学）