交〉といった自己双対イメージを利用した方が，たとえば

$$a\cdot x=0$$

を扱うのに，双対ベクトル a で規定されているという形だけでなく，a と直交といった直接的なイメージも捨てがたい感じがする．それでぼくは，悩みながら，これもズボラに内積を密輸入する．そのかわり，外積の双対性としてのグラミアンには特別の位置を与えるし，ベクトル積は自己双対性との関連で扱う．しかし，このところは，つねに悩みの種である．

内積の問題はともかく，それ以外はだいたい，〈多次元の正比例〉というスローガンで処理できる．この点では，ぼくの場合，多次元を通じて〈正比例の意味〉を明らかにする，ぐらいに割りきっている．

しかし，それでは少しも線型代数をやった気にならない．一方で，やはり線型代数は固有値問題だ，といった気もする．ところが，固有値問題の満足なカリキュラムが，いまのところ，ぼくにはない．2/2 行列の範囲で大学入試に固有値問題が出るという話を聞いたが，これは論外で，固有値問題のうまい解説法があったら教えてほしい．他分野の人に〈固有値てナンノコト〉と聞かれると，ぼくはいつもムムとつまってしまう．

さしあたり，作用素 A を持った線型空間 V の既約分解とはいえる．行列だけで対角化というのは反対で，固有空間なしの固有値問題はつまらない．ここで，変形としてのイメージとどうつなぐか，という問題がある．

そのほかに，2次形式との関連があり，とくに極値問題と関係づけたい．正値性の問題はそのまま極値問題だし，2次で条件づけられた2次式の極値問題として，ラグランジュ乗数としての固有値の意味というのもある．

そして分解の意味として，線型微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

の話はだれもやることだが，ぼくとしては

$$\frac{d^2x}{dt^2}=Ax$$

もやりたい．バネとオモリの系列で固有振動の出てくる話だが，それを

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t,k)=\Delta_k{}^2x(t,k)$$

の形にすれば，波の方程式

$$\frac{\partial^2x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2x}{\partial k^2}$$

として，フーリエ解析の固有値問題としての位置づけへの水路が開けるだろう．〈線型代数から関数解析へ〉というスローガンを，固有値問題のうまいカリキュラムで実行することに，ぼくはまだ成功していない．

つまり，線型代数の全体としては，ぼくのカリキュラムはうまくいっていない．教養課程で教えはじめて，かれこれ 20 年になるというのに，ダメなものだ．

しかし，居直っていえば，ぼく以外の教師もみんなダメだと思う．ダメ教師とダメ学生が，線型代数をどう教えるか，どう学ぶか，とウロウロしとるのだ．これは，たいへんヨイコトだと思う．ウロウロするから進歩があるのだ．

（もりつよし／京都大学）

討論 量・線型代数・数学教育

小島 順・齋藤正彦・森 毅

●小島式線型代数宣言

小島　僕は，線型代数のわりにモダンな本を書こうとして，しかもその「意味」が読者に伝わるようにしようと思ったわけです[1]．それが一つと，もう一つは，子供の量の計算，小中学校の課題としての量の計算ということもあるし，僕の息子の量の計算ということもあるけれども，いろいろやってみると，われわれが日常的にやっている量の計算の構造が，線型代数——線型代数という場合には，齋藤さんの本［2］みたいな線型代数じゃなくて，もっと現代風な線型代数という意味だけれども……

森　カテゴリー風……

小島　僕は「公理的・カテゴリー論的」と一応書いたけれども，そういう線型代数を特に1次元に限ったものと，日常生活の中の量の計算の構造とが，全く同じだということに気がついて，そのことに重点を置いて書いた．つまり，その相互の関係ですね．一方では現代風な線型代数の立場で初めて量の計算の構造というものがちゃんと扱えるということです．それから一方でいうと，量の計算ほどわれわれに慣れた，親しんでいるものはないんだから，それが1次元という特殊の場合として含まれているならば，一般的な有限次元の線型代数というものは非常にやさしいものになるんではないか．つまり早稲田の学生にとっては，双対性とかテンソル積とか，まあ何でもないようなものでも，なかなか飲み込めない．森さん流にいうと，飲み込んでも永久に意味が発生しない．そういうことがあるわけですね．だから，そちらにも意味を与えることができる．つまり，量の計算と現代風の線型代数を重ねて扱うことで，量の計算自身がはっきりするし，それから現代風な線型代数もはっきりする．

もちろん，僕がそういうことに気がついたのは，量のことばかり見ているからじゃなくて，一般的な数学を知っているし，もちろん多次元の線型代数を知っていて，その目で見たからで，考える過程からいえば，多次元が先にあり，1次元はあとから出てきたものだし，実際に教える場合でも，1次元をまずやって，それから多次元の場合へと拡張していくよりは，多次元を普通にある程度やる中で1次元に言及した方がいいに決まっている．しかし，たくさんある線型代数の本の中にまぎれてしまわないために「1次元線型代数を中心に」という名の章をつくった．本当に読んでほしい人たち，数学教育に関心のある人とか，あるいは全体としてはむずかしいけれども，1次元となっていればそこだけは読んでくれるかもしれない小学校・中学校の先生たちとか，そういう人の目を引きたかったわけです．ところが別の人がそれに引っかかって，頭にカッときたわけでしょう．その意味では，1次元の部分を取り出して前に持ってきたことは，効果があり過ぎたともいえるけれども，実際のやり方としては一緒にやるのが普通ですね．

齋藤　読者として僕は予想されてなかったわけですか．

小島　そう．齋藤さんとの関係でいえば，もともと線型代数というのは，齋藤さんの本だとか佐武一郎さんの本［5］だとか，いろんな標準的な教科書があって，それを使ってみんな一応のことはやっているわけです．僕の本のもととなった講義というのは，数学科の学生で，別に標準的な線型代数をやっている人たちに，その補充として数学の概論を教えるというコースでやったわけで，齋藤さんが頭にくるほど，線型代数の入門をこういうふうに変えてしまえというのではないんです．

森　そうじゃないのか！

小島　まあ一応へりくだっていえばね．（笑）

齋藤　線型代数はだれかほかにもやっているんですか？

小島　線型代数のコースは，早稲田の場合には数学科だけじゃなくて，いろんな学科をまぜた混成のクラスでやるわけです．そのほかに数学科

だけを土曜日に集めて「概論」というのをやる．僕はそこでやったわけです．ですから，補充という意味があるし，あるいは解毒剤という意味もある．

森 まあ，実際どうやっているかは別にして，こういうふうにおれはやりたいのだと言え！(笑)

小島 もちろんほかに標準的な本がたくさんあるからこそ僕のようなやり方が成り立つわけだけど，精神としてはこういうふうに変えてもいいんじゃないか．

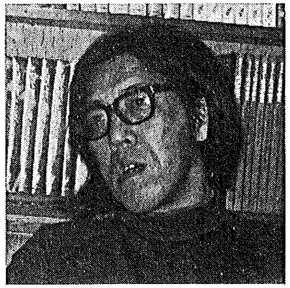
●双対性をどう扱うか．とくに電流と電圧

齋藤 しかし，たとえばさっきの双対性なんか，数空間でやっていると最初からあたりまえのことでね．

小島 だから数空間ばかりでやるなといっている．

齋藤 双対性なんかやらなくても済んでしまう．無限次元のときになったら，初めてやらざるを得なくなる……

森 それはそうでもない．それはたとえば竹内啓説のように，数空間でも双対性を重視すべきだというのがある．つまり彼の場合，数空間といっても，財の空間と価格の空間であって，それが数理経済の一番のもとだと称するわけ．彼はいつか社会科学における三つの数理モデルとかいう怪しげな説を唱えたことがあってね，政治モデル，経済モデル，歴史モデルと称するわけ．話を聞くとものすごく矮小で，政治モデルというのは，何を隠そう，ゲームの理論である．歴史モデルというのは，何を隠そう，線型微分方程式系なんだ．経済モデルというのは線型代数．その彼の線型代数というのは，縦と横という性格で世の中は成り立っているということなんだ．


森 毅

小島 同じ数ベクトルにしても，背後にある実在の性格が違うというので，縦と横というふうに竹内さんはいうわけですね．[森さんがここで数空間と言っているのは，一般の n 次元空間でなく，1次元空間の直積 $X_1\times\cdots\times X_n$ を考えることにあたり，別に金額の空間を Y として，Y に関する双対 $Y\otimes X_1{}^*\times\cdots\times Y\otimes X_n{}^*$ が横ベクトルの空間にあたる．そういうふうに後で思った．――後記] そういうことはいたるところにあるわけで，僕が取り上げたのは，一つの回路の上の電流と電圧，その積としての電力，パワーというのかな，電流と電圧はパワーに関して双対だということで――もちろん，必要ないといわれればそれきりのところがあって，双対の概念なしにやれることはやれる．だけど，数学とはそういうものじゃないでしょう．

齋藤 それはその方がいいかもしれない．だけど，もし僕が電流，電圧を考えるとすれば，多分，まず単位を決めて，両方実数だと思ってしまって，同じものとして計算しちゃうと思うけれども．

小島 それはそうだ．僕でも，多次元のところでは [回路上の電流と電圧の場合は]，単位は消しちゃって，どちらも値は数としてやっていますよ．

森 そしたらおれの方がラディカルだ．(笑)

小島 要するに今の話はトポロジーの言葉ではチェインとコチェインの関係になる．電流はサイクルで，電圧はコバウンダリという形に定式化できるわけでしょう．それは双対という言葉を使わずにもいえるかもしれないけれども，やっぱり使った方が的確に表現できるし，使った方がいいのじゃないかな．

齋藤 僕は，昔線型代数を勉強したときに，ベクトルが横に書いてあったり縦に書いてあったりするのがものすごくいやで，どう区別されるのかもわからなかったから，全部縦にしてしまった．どうせそこは数しか入っていないんだからと思ってね．そうすると，その双対性はどこかにとんじゃって，なくなっちゃう．それで押し通せちゃうから，押し通すというわけだ．

森 僕は，最初の間は横ベクトルというのはベクトルとは絶対呼ばず，1行 n 列の行列としか言わん．

小島 僕のはまた違うんです．普通の数が並んだやつ $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ が，n 行1列の行列つまり縦ベクトルと同一視されるわけですね．それと別に1行 m 列という形の横ベクトル $[a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_m]$ を双対として見る．だから，最初のコンマで並べた横ベクトルは，縦と同一視するわけです．僕が X と $L(R\,;X)$ を細かく区別するというふうに齋藤さんは書いているけれども，それは実は逆なんで，自由にベクトルを線型写像と思えということを主張したわけなんです．

●単位つき計算すなわち1次元線型代数

森 15 年ぐらい前かな，A とか x とかいうベクトルを使って，ある程度実質的には公理主義的に扱っていたら，学生から抽象的だというクレームがついてね．そのときに，「あんたら，2と 2m (メートル) とどっちが抽象的だと思う？」と反問したことがあって，まるごとのかたまりを論ずるんだから，まるごとを A と書いてもいいのではないかと．といっても，15 年前というのはいわゆる普通の線型代数にかなり近い授業をしてたんだけど．

齋藤 いまの2と 2m と，答えはどうでしたか？

森 それは 2m の方が具体的だというのが普通だと思う，「もの」だから．

齋藤 それはそうだ．じゃ，どっちがわかりやすいだろう？ やっぱり2だろうな．

森 ともかく長さ l と書いたときに lm でなければいけないか，l が長さそのものでいいかというのは，一つの問題だと思う．

齋藤 僕は昔から，m とか cm とか単位がくっついているのがきらいで，まず初めに全部取ってしまう．ただの数にしなければ考えられない．要するに操作できない．小島君は，それは裏で何かの操作をしているので，それを表面に出してちゃんとした数学まで引き上げてやったのが自分の本なんだといっているわけね．

小島 さっき子供と一緒にやったといったけれども，『わかるさんすう』[12] を使ってずっと勉強してきた．なぜ親がそこへ出るかということはまた別のことだけれども，この本はちゃんと量の計算は量としてそれを正面に出してやっている．ただ，文字がある段階で出てくるわけですね．そうすると，文字は量を表わすのでなく量を測った数値を表わすことになっていて，

距離＝速度×時間

のような公式を文字を使って


齋藤正彦

$$s=vt$$

のように書くことができない．[実はあとで改訂版 (昭和 49 年) をみたら，$L=l$ km のように量と数値を大文字と小文字で書きわけることに変っていて，量そのものの公式もあった．――後記]

森 おれは，文字は数だけというのには反対なんだけどな．

小島 たとえば 8km/時の速さで3分というのは

$$\frac{8\times10^3\text{m}}{60\ 分}\times3\ 分$$

で，機械的に単位の分も約して，これは 400m になるわけです．つまり，式があったときに，v とか t とかいうのは量そのもので，s も量そのものということにすると，こういう単位のそろわないものも代入することができて，あと全く機械的に処理できる．だから，こういうやり方の方がやさしいわけ，ほんとならね．

齋藤 やさしいかどうかわからない．

小島 やさしいんだ．

齋藤 それは自分にとってやさしいということではないか．

森 いや，客観的に．

小島 機械的にできるという方がやさしいに決まっていると思う．齋藤さんは，時速 8km で3分というときに，数の計算に置きかえるわけでしょう．換算とかいろんなことをやって，要するに 400 という数字を出して，そこでまた意味を考えて，これは 400 m だっていいますね．常に意味にこだわるのがわずらわしいと齋藤さんはいうけれども，僕のいうのは機械的に処理するやり方なんです．それを正面から取り上げた．

たとえば電気回路のことで

$$IR=V$$

という公式がありますね．これはそれぞれ電流と抵抗と電圧をあらわす数値についての公式だといってみたって，内容は空虚で，あまり意味がない．やはり実際に意味があるのは量の間の関係でなければならない．ところが，いままでの数学の習慣というのは，背後にそういう量を考えるにしても，表に出てくるところではそれをあらわす数の式だというふうに思うわけでしょう．その二段階になっている．

●量と数とどっちが分りやすいか

齋藤 量というのは何なんですか？

小島 量は何だという議論は一応避けることはできるでしょう．量の計算をわれわれは日常的にやっているし，量として僕らが意識するものがあるし，ある時間を2倍にするというようなことも，ふだん遠慮なしにやっているわけだから，数学の立場からそういう量の計算を形式化するという場合には，量とは何かなどということを議論する必要は一応ないと思う．

齋藤 そうですか？ たとえば秒速○メートルの風というのと時速○マイルの風というのは，量としては同じものですか？

小島 同じ……

齋藤 そうか――何個，何個というのは……

小島 ものの数を数えるのは，線型代数を議論するときは一応……

森 ものの数の場合だって，一応量

といえばいえるし．ただしその場合は，これは小学校の教育では二つ説があって，何個とかいうふうに離散的な場合はアトムがはっきりしているから，単位を考える必要はない．その場合は原則的には名数をつけないことにしたらという意見があった．特に日本語の表現法では，ホンだとかボンだとかいうふうに変わったり，それの扱い方をどうするかというのがめんどうだしね．そして，連続的な場合だけ単位をつける方がベターでないかという意見があったんだけれども，しかし掛け算とかの意味をやるときには，離散的でも名数をつけた方がわりかた便利なことがある．1人当たり何個とか．

小島　たとえば齋藤さんの文章にある「袋」というのは，

12 個÷4 個/人=3 人

こういう感じですか．

12 個÷3 人=4 個/人

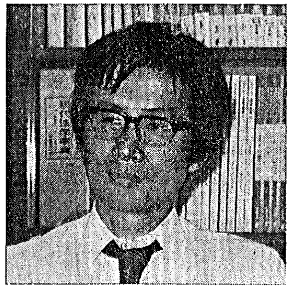
これが「庖丁」だ．もっとも，いま小学校では人や /人 という単位をつけないですね．

齋藤　ね，わからない．これは書いてもらいたいな，いまのわからなくなったところを．

森　包含除，等分除問題というのがあってね．非常に現代数学風ないい方をすると，掛け算というのは，プロダクト・スペースと考えるよりは，トリヴィアル・ファイバー・スペースと考えた方がいいのだ．これは数学を知っている人向きにいうんだけれども，つまりベースの上に一つずつ同型なファイバーが乗っていると考えた方がいい．割り算の場合に，ベースを求める場合（包含除）と，ファイバーを求める場合（等分除）と――そういう違いです．

齋藤　何となくそういうものらしいということぐらいはわかるんだけど．

森　これは私の学童期の自己批判を含めていいますと，いまの等分除と包含除というのは明らかに概念的に違う．なぜそのときに僕が混乱しなかったかは，われながら不思議なんです．



小島 順

齋藤　普通混乱するでしょう．

森　そのことじゃなくてね，現実に小学校で混乱してやるのよ．たとえば，何でもいいですけれども，

$6\overline{)138}$

という割り算があるでしょう．普通そのときに，13 の中に 6 が幾つとれますかというい方をするわけ．これはちょっとおかしい．これは 130 でしょう．6 の方と単位が違うわけね．単位が違うのに包含除を使うのは悪い……

齋藤　何ですか，包含除というのは．

森　包含除と等分除と称するわけよ．テクニカル・タームとしては．

齋藤　僕の習った袋と庖丁という……

森　つまり，6 が幾つとれるかというやつと，6 つに割るというのと――ところが，この場合，被除数の 13 は 130 で除数は 6 でしょう．ディメンジョンが違う場合，包含除というのは成り立たない．同質の世界でないと．

齋藤　わからないなあ．二人でやってよ．

小島　僕もこういう細かいところはわからない．

齋藤　技術的にそう考えた方が簡単だから考えるといっちゃだめなの？　これは 138 だから見えるけれども，数字がダァーッと続いていた場合に，これが何個あるかまで考えられないでしょう．それを考えずに済むというのが，例の割り算のやり方の偉大なところなんじゃないかな．

森　13 と 6 とを同質なものとしてやるためには，いわば浮動小数点的に考えなければいけないわけよ．

齋藤　そんな大げさに考えなくても，ただ割ればいい．小数点の位置とかゼロの数はあとで……

森　割るとはどういうことだ？　じゃたとえば 6÷2 は何だ？

齋藤　3 に決ってる．

森　どうすることだ，6÷2 は？

齋藤　それは九々でみんなわかっているんだから，意味なんか考える必要はない．

森　そしたら，どうして，あるときは 6÷2 をしようとし，あるときは 6×2 をしようとし，あるときは 6+2 をしようとするのか．経験か？

齋藤　経験でしょうね．第一，結果がふえたらおかしいぞとか，これは前より減っているのは変だぞということはわかる．

森　しかし，それをやると非常にヤバイことが起こってね．一般的にはそういう態度でしばしば破綻するわけでしょう．たとえば順列・組合せが重複になると間違うとか．

齋藤　あれはむずかしいから．

森　むずかしいっていうか，どっちをどっちかわからなくなる．

齋藤　あれは本当にむずかしいんだから，どう教えたってむずかしいですよ．

森　あれのむずかしさは別の問題としてあるんだけどさ．つまり，等分除と包含除というのは，概念的に違うということですよ．それから，割

り算というときに，これはあまり調査したわけじゃないけれども，たいていの人が感覚的に思い浮かべるのは等分除なんだ．三つに割るというふうに思うんだ．ところが，時として包含除の問題も扱うわけよ．3 が幾つあるかということ．3 が幾つあるかという問題を扱う場合に――もちろん，どこかで等分除と包含除は同じだということをやっているわけよ．

齋藤　要するに，両方とも割り算だっていうんでしょう．

森　結局そういうことね．両方とも同じ割り算で可能だということをどこかでやっている．

齋藤　だから，一々それがどっちか考えるよりは同じ割り算だと言う方がよい．

森　等分除の方が自然なときにわざわざ包含除の説明を使ってみたり，包含除の説明が妥当なときに等分除の説明をしたりということがしばしば起こるんだ．それで現実に子供は混乱するわけ．

齋藤　それを説明するからいけないんじゃない？

森　するからといったって，大体するのだな．

齋藤　本当に僕みたいな意味オンチは少ないのかな．少なくないんじゃないかと思うんですけどね．何でも数にしてもらえば，ものが一種類しかないんだから，わかりやすい．だけど，一々ものの種類がくっついていたら，無限の種類を扱わなければならないから，非常に面倒臭くて，むしろ混乱するでしょう．

森　そこら辺，僕は，どうでなければならないというふうには必ずしも思わないけどね．それから，ある種のやり方でうまくいけば，それでいいのかという問題も同時にあると思うけれどもね．いわゆる落ちこぼれる子という中には，多分，そういうところにこだわる子が現実に多いことは確かだ，小学校で．

齋藤　意味にこだわる子が落ちこぼれるんですか？

森　うん．つまり，普通の優等生のパターンというのは，あまり意味にこだわらずにそれを飲み込んで，消化能力が適当にあって，自然に意味が意識せずにでもついてきて，自由に使える，そういうパターンの子が多いのは事実だ．ただし，それがずっと続くかどうかという問題があるわけね．それで進んで，中学校ぐらいで破綻する子がかなり多い，そういう態度が続けられなくて．高校あたりでは，もっと破綻するのが多い．意味を捨象していくことがいいかどうかということは別に問題があるんだけれども，小学校といえども，それでできない子もいるということも事実だと思う．

●包含除，等分除を区別するのは本当によいことか

齋藤　その場合に，袋と庖丁ということにこだわって教え込むよりは，そんな区別は忘れてしまえ，これは割り算という一つのものだと言って抽象化を徹底した方がいいんじゃないか．

森　じゃないんだ，それは．

齋藤　証明済みですか．

森　変に，これが等分除だ，これが包含除だといってキャンキャン言ってもだめよ．やるからにはやるなりの手段が要る．けれどもデータをはっきり示せといわれても困るけれども，多分僕は真実ではなかろうかと思っていることは，いままでの数学教育の大きな欠陥は，わかるやつはいろいろ理屈いうてもわかるやろ，アホはしゃあないから覚えておけ式にやるのが，むしろ裏目に出ている．むしろ優等生ほど，わからんでもこなせる．一般論として．

齋藤　それはまあそうだな．

森　いわゆる落ちこぼれとかいう場合には，本当にわからんとどうしようもない．一番はっきりしているのは，知恵おくれと称する子の場合[9]……

齋藤　抽象能力の不足とか……

森　そういうこともある．

齋藤　抽象化の訓練を徹底した方がいいんじゃないか．その包含除，何とか除というのを，たとえば数教協みたいなところで何年間もやっていながら，まだみんなの了解が一致しないようなものを基礎に置くのは具合が悪いと思う．

森　一致しないことなんてないよ．

齋藤　森さんが全部の子供を教えるんだったらいいかもしれないけれども，ものすごくたくさんの人が方々で教えるわけでしょう．

森　現実に包含除，等分除というのは普通どこの小学校でも教えていますよ．ただ，教え方がいいか悪いかという問題がある．

齋藤　こういう複雑なことをいつまでもくっつけておくから，教え方がいいか悪いかということが，ものすごくつきまとっちゃうんじゃないですか．最初に取り払ってしまう努力をした方が，簡単でいい．

森　逆にいえば，これが等分除だ，これが包含除だというのを，いま非常に形式的にやるわけ．ひどい場合には，「名数とか単位とかは，割り算の場合は二か所につけるんです」と，こう教える先生がいる．

齋藤　三つの項のうちの……

森　二つにつくんです，と．

齋藤　大体そうじゃないですか．

森　それは，"/" という表記を使うか使わんかによるわけね．しかしそれをやると，たとえば正比例型の場

合ならまだ問題ないけれども，長方形の面積の縦と横というときの面積÷縦の長さ，あれは割り算としてはちょっと異例なんで，あれが割り算でないといえばそれまでの話だけど，掛け算の方でもそういうことをいうと，面積のときには破綻する．そういうふうに形式的にやることがかえってむずかしくしているので……

齋藤　そういう異例だとかいうものが存在すること自身が，そういうことがむずかしいということの証明なんですよ．

森　実際に面積の割り算はむずかしいんだ．

齋藤　僕は実は，きょうに備えて小島君の本少し読んだら，かなりもっともだと思った．確かに日常的な計算は１次元線型代数だと思った．それぞれに線型空間があって，それを計算しているんだなということがやっとわかった．逆に言えば，僕みたいに何十年も数学やっていた人がやっとわかるという……

森　何十年も数学やっていたからかえって……（笑）

小島　わからなくなった．（笑）

齋藤　やっぱり僕はむずかしいことなんじゃないかと思うんですがね．

小島　それは，普通の数学者はそういうことに目を向けないからね．

齋藤　僕は小学校のときに袋と庖丁がわからなかったというのは……

森　わからなかったというのは，むしろ 個/人 という表記を使わないで，つまり等分除とか包含除とかいうことを非常に形式化して，単に見分ける訓練だけしていたということ……

齋藤　だから，さっきから僕が言っているのはそのことなんで，量の計算を１次元線型代数として扱うのは難しいことだと思う．だから，それをあらゆる先生がちゃんと教えるということは期待できない．先生の中には僕みたいな意味オンチも相当いるはずだし

森　そうじゃなくて，教科書にもある，あんたも教わったように．それがわかりにくいので，たとえば数教協なんかでわかりやすく教えているのだ――というのが，数教協副委員長としてのコマーシャルでございまして．（笑）

●行列は表か，または線型写像か，または２重添数族か

小島　議論はいろいろあるけれども，齋藤さんが書いていたことの中に，行列の問題がありますね．これは，なんで齋藤さんともあろう人がこういうことをいうかと……

齋藤　何十年も数学やっていたせいかな．

小島　僕も齋藤さんとは独立に書いておきましたけれども，表という言葉を齋藤さんも使い，僕も使うけれども，僕は，見出しのところに数値が入れてあるのが表なんで，配列の仕方とは一応別だと思っているわけ．齋藤さんの表というのは，配列つまり一種の図形のことをいっていますね．

齋藤　そうです．

小島　僕は，図形にする前に，税金の申告をするときに項目別に番号がついていて，それは横にしようと縦にしようと同じであるように，要するにインデックスごとに何か数字が対応しているのが本来の表と思い，配列の仕方っていうのは一種の表記法で，その二つは一応区別していいと思うわけです．

齋藤　それは日常言語としての表と……

小島　日常言語としての表というのは，あの表を写しておいてくれっていうときに，一つの行に書ききれなくなったら，残りは次の行に写したっていいというのが表の本質なんで……

齋藤　行列というのはこういう表ですといった場合には，表という言葉がそこで数学用語になる．だから，はっきりした定義がそこで与えられる．

小島　だから，そういう配列ということを最初の定義としなくたって，ちっとも困らない．たとえば齋藤さんは，配列としての表にすると手にとって扱えるとかいうけれども，それはだれだって，どういうふうに最初の定義をやる人だって，手にとって扱っているわけで，なんでこういうことに齋藤さんはこだわっているんだろうと僕は思う．

齋藤　まず表にしなければ扱えないということは合意するわけですか．

小島　理論的な考察じゃなくて，実際に数字が出てくるときは，それは決めておかないとどうしようもないわけ．置き場所を決めておくというか，配列としての表というのは，実際の表記法としては不可欠……

齋藤　でしょう．

小島　そうですよ．それは何も否定はしていない．僕の本だって，どの本にも劣らないほど，そういう配列としての表は使っている．だから，それはそれでいいので……

齋藤　僕が文句いったのは二つの点があって，線型写像と同一視するということが一つと，もう一つは，１から n までの自然数の全体を $\bar{n}$ と書くとき，行列とは $\bar{n}\times\bar{m}$ から R への写像だというやつ．

小島　最初のことについていえば，行列とはいろんなものをあらわすというわけで長島とか王とかの野球のスコアを並べたのが行列というみたいに導入する本もあるけれども，あんなのは言ってみてもしようがないんで，要するに，線型代数の中の行列というのは行列算の枠組みの中の表ですね．そして行列算というのは，どんな場合だって結局は線型写像として機能している．それが第一点．

それから第二点は，$R^{\bar{n}\times\bar{m}}$ の元は写像だと齋藤さんはいうけれども，僕は２重添数族と書いているわけで，２重添数族が，日常的な表の概念と一致するということはさっき言いましたね．写像といったって結局その程度のことでしかないと思う．なんでここでツェルメロ－フレンケルなどという大層なものが出てくるのか．

僕は，$\bar{n}\times\bar{m}$ が定義域の場合の写像というのは２重添数族そのものだというふうに単純に理解しているわけで，それはブルバキかもしれないけれども，そういう用語法が日常生活の構造から離れているとは思わない．

齋藤　いや，２重添数族と，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と実際に書いて，縦と横が指定されている表とは別のものでしょう．

小島　ですから，それは，本来の対象とその表記法との関係と思っているわけで，２重添数族の全体を $R^{\bar{n}\times\bar{m}}$ であらわすということは，ブルバキに限らず，いまの数学のごくありふれた習慣だから，それはそれでいいんじゃないでしょうか．

齋藤　いや，そんなことを言う必要はないだろうといっているんだ．言ってもしようがないんじゃないか．

小島　じゃ，どうするの？

齋藤　ただ表だというのが，一番わかりやすい．これがもし分りにくいものなら，それは実はこれなんだといって説明するのは意味がありますよ．だけど，こっちの方がずっと分りやすいものを，わざわざ分りにくいものに置きかえるのは意味がない．

小島　だから，縦横に並べるのもいいけれど……．線型写像をあらわすものとしては縦横の並べ方は決まっているけれども，２階共変とか２階反変とか，そういう一般の２重添数族は，どちらを縦にするというのは，必然性もあまりないような……，別に配列にしなくたっていいし……

森　僕はその場合は，若干テンソル解析風に，a^i_j と a_{ij}，これは区別した方がいいような感じがある．僕は行列というのは，a^i_j だけにした方がいいと思う．

齋藤　線型写像とか２次形式とかいうものを全部忘れちゃって，ただこの表が行列だと定義しても，ちっとも差しつかえないんじゃないか．

小島　そんな……．ただの表と定義したって，実際の役には立たないわけですよ．

齋藤　いや，立ちますよ．

小島　立つときは，行列としての計算をやるから役に立つんで，行列の計算する限りにおいては，そこで $L(R^n; R^m)$ に変身している．

森　そこでさっきの話がちょっとからんでくるんだけれども，つまり，行列というのはこういう表ですと，行列と行列との掛け算はこう規則しますといって，飲み込むやつと飲み込まんやつとがいるという問題がやっぱりあるんだ．

齋藤　それはやっぱり最初は無理なんでね．それはだから，線型写像の掛け算から必然的に決まる規則ですね．それをいわざるを得ないでしょう．

小島　だったら，その限りにおいては，ただの表ではなくなっているわけでしょう．

齋藤　もちろんそうさ．だけど，それだけの意味じゃないから，いろいろなところに使えるものだから，いっそ表としてそこから抽出した性質だけを取り出して行列というものをつくりましょう，そうするといろいろ便利なことがあります，と……

森　僕はそのやり方は反対でね．すべてに行列といっちゃうとややこしいから，行列というのは混合テンソルの a^i_j だけに限定をして，あとの場合は一般のテンソルとして考えて間に合うんじゃないか．

齋藤　それは不自由じゃないかな．

森　不自由じゃないよ．

齋藤　そうすると，２次形式はミックスしていないから，行列で書けないことになる．

森　行列でないですよ．

齋藤　それこそ不便じゃないか．あれこそ行列で書いたらパッパッとわかる．２次形式はもともとは斉２次式ということなんだから，ベースが最初からあると思った方が自然です．あとでなくすことはできますけどね．

森　斉２次式というのを，行列算の ${}^t xAx$ という書き方で，行列算の枠に入れるということは，混合テンソルに置きかえていることよ，実質上は．

齋藤　そうかもしれないけれども，とにかく２次式があればこういう形で書けるでしょう．

森　だから，そういうときは全然不便はないわけ．線型写像に置きかえたら行列になるんだから．単に

$$\sum a_{ij}x^iy^j$$

とか，あるいは

$$\sum a_{ijk}x^iy^jz^k$$

とか，こういうときはこれでかまわない．

齋藤　だって三つあると行列で書けませんから，それは仕方ないでしょう．

森　そうだけど，その ${}^t xAx$ と書く書き方に関しては，いまのように

行列を線型写像の Ax に限定して，全く不自由はない．そのことに関しては．

齋藤　でも，やっぱり一々考えなければならない．要するに，なるべく頭を使わないで済ました方がいいとぼくは思っているんだ．

森　頭使わないって，${}^txAx$ といった式を使うときにすでにやっているんだから，それで済むんじゃない？

齋藤　しかし，何も考えなくたって……

森　そうしたら，なぜ横に書くの，この初めのベクトルを．

齋藤　そうでないと掛け算できない……（笑）

森　それはやっぱり，コンベンションというよりは，直しているんだとおれは思うがな．

齋藤　普通は (x, Ax) で僕は定義するけれどもね．だから，最初にこういうものがあることにしてやっているわけですね．

森　それでやったら，完全に線型写像じゃない？

齋藤　要するに，線型写像と同じふうに扱えるということが大事なわけでしょう．本来線型写像ではないにも拘らず．

森　それは同じことじゃない？　それは，表でやったということのメリットでも何でもなくてさ．

齋藤　だけど，2 次式があれば，まずそれを表にすぐできるんだから，事の意味なんて考える必要はない．

森　2 次式をすぐ表になんかできないよ．そうじゃなくて，2 次式をこういう表記法で書くことはあるけどね．

●2次のテンソルだけが行列で表わされることは無意味か

齋藤　小島君に反論したときは多少誤解があったんだけど，小島君の本に2次形式を行列であらわすことにこだわるのは意味がないと書いてありましたね．それで僕は，2 次形式だけが表わされることにこそ意味があるんだと書いた．要するに，いまの数学は2次数学だといっているわけですよ．

森　ただ，そのことはちょっと程度の高い問題だな．なぜ2次数学かという問題は，なぜ1次数学かという問題よりも，内容的にちょっとむずかしいし，思想性の高い問題であって，おれはそれに対しての説得的な説明はちょっとできない．

齋藤　小島君にもう一度いうと，僕はちょっと誤解があって，あれは3次形式が表わせなくて2次形式が表わせるんだから意味がないと書いたんだろうと思って，反論したら，そうじゃなくて，双線型形式は表わせるけれども，双線型写像は一般に表わせないということだという手紙が来た．双線型形式でも，行先の空間が1次元でなければ，これは実は3次の量であって，それを表わせないのはこれが2次でないからなんで，同じことなんですよ．僕の反論は通用しているわけなんです．双線型写像の行先の空間が R の場合に限って表わされるということは大事なことなんで，それに意味がないといわれると僕は非常に困るんだな．代数系というのは，二つのものに対する演算しかほとんどない，特別なものを除けば．それの反映だと僕は思うけれども．

森　根本的には，それがなぜ数学は2次数学かという問題なんだけれども．

齋藤　演算というのは一挙に三つできない．人間の頭で考えると，二つずつやるのが自然だから，2 次式になっているんじゃないですか．

森　でも，それだけじゃ説得的でないな．なぜ2次が大事かということは，非常に深遠な問題であると思う．

齋藤　そうかもしれない．しかし，とりあえず思いつく理由としてそれがあるのは確かじゃないですか．

森　もしそれをいうなら，双対性が"2"だからという感じの方が強いけれども．

齋藤　双対性も同じことでしょう．

森　いやちょっと違うんじゃない？二つのものというのとちょっと違うと思う．

齋藤　でも，演算というのも二つのものを持ってきて何かするんだから．

森　演算というのをどう考えるかによるけれども，何かに何かをするというんなら，少しそれに近い．何かと何かをするというのとはちょっと違う．

齋藤　何かと何かをするといっても，実際には何かに何かをしているわけなんで，そうすると，どうしても1個ずつしかできない．

森　それが，対象と操作といった双対性を背景にした構造から来ていると思いますけどね．

齋藤　小島君に反論があれば聞きたいんだけれども，226 ページだ [1]．

小島　2 項演算というのは結局三つでしょう．X と Y に対して Z という感じですね．常に三つある．だから，それを表現すれば，3 重添数族というのが一番の典型なわけで……

齋藤　そうじゃないんだ．テンソルというのは君のお得意だからやると，1 次元の場合にはないのと同じですね．だから，その場合だけが2次数学の中におさまる．ごく自然なことである．

小島　何を言いたいのかちょっとわからないんだけれども．

齋藤　226 ページの「三重添数族は当然，行列としての表現は不可能である．これから考えても，双線型形式を行列であらわすことにこだわる

のは意味がない」というのは暴論だと僕は言っているのです．双線型形式だけが行列であらわされるということこそ一番大事なことだと言っているんだ．

森　双線型形式を行列であらわして何の効果がある？

齋藤　だって，行列論が全部使えるという……

森　使えないよ．

齋藤　固有値問題とかなんとかに全部使えるわけよ．

森　2 次形式の固有値問題というのは本来なくってさ，線型写像の固有値問題じゃないか．

齋藤　だから，行列論の，というのは線型写像のといってもいいかもしれないけれども，とにかくそれが使えるわけ．

森　2次に関しては線型写像に転換できるということをいっているのにすぎないじゃないか．

小島　だから僕は，2 次形式の固有値問題というのは本来ないと書いている．森さんがいったとおりで，内積を前提として，対称変換という概念が意味を持って，その対称変換の固有値問題を実際上は調べているわけです．

齋藤　そうですね．

小島　だから，要するに，実際に行列を使うところでは常に変換にかえられて，そこで議論しているんだから，行列というのは線型変換をあらわすもので2次形式を表わすものではないといっても，実害は何らないわけで……

僕は2次形式を成分の行列でなく基底つきで

$$\varphi=\sum a_{ij}v^i\otimes v^j$$

のように表わして，ずっとやって，上下のサフィックス——上のサフィックスというのは言葉として変だけれども——を生かして計算する方がずっと簡単だということを，ここで感想として持った．行列算を使うというのは，ここでも一応やっているんだけれども，具体的な数値のでない理論的な扱いでは実際上のメリットはなかったのでほどほどでやめた．それについて，サフィックスが三つになればどうせだめなんだからというちょっとした言訳もつけておいたわけ．

齋藤　だから，それは言訳としては不当だといっているんだ．

小島　不当かな．もともと僕は，2 重添数族でさえ，理論的な考察では，行列というか，縦横の表なんかにする必要は何もないと思っているわけだし．

齋藤　それも不当だと僕はいっているわけで……

小島　だから，そのついでに，どうせ三つになればもともと無理なんだしという，安心というか……

齋藤　そこで安心してもらっては困る．

小島　どうしてそんなにこだわるのかな．

森　やっぱり行列のカテゴリーとして行列をとらえようとしているわけでしょう．

小島　そうですね．

森　行列のカテゴリーというのは，オブジェクトが n とか m とかで，モルフィズムとして行列がある，そういう感じであるわけでしょう．

齋藤　n とか m とかというのは何？

小島　m 行 n 列の行列というのは矢線 $n\longrightarrow m$ として決まるでしょう．n, m という数字がシンボルとして使われるわけです．写像でいうと $R^n\longrightarrow R^m$ だけれども，本来の狭い意味の行列は——狭い意味というと，齋藤さんにとってどうか知らないけれども——こういうカテゴリーの中での存在でしょう．R^n の全体をオブジェクトとして，その間の線型写像をモルフィズムとするカテゴリーとちょうど同じ（自然同型）なわけですね．だから，それをどっちでやるかは大した問題ではなくて，実際上は同じものだと思っていいわけです．

齋藤　それはよくわかるんだけど．

小島　だから行列というのは，要するに，行列のカテゴリーの中で考えなければ，表だといっても意味がないわけ．

齋藤　そうか．お二人が何を考えているかやっとわかったけど，表に意味がないとは言えない．表にしなければいじくれないじゃない．

小島　だから，いじくるときはまた別のレベルの問題だと僕は何度も繰り返したのであって，いじくるときの作法というか共通の約束というのは大事です．

●外延量と内包量との区別，線型量とアフィン量との区別がごっちゃになっている

小島　齋藤さんのを読んでメモしたんだけれども，意味の捨象というか，それが数学の進歩の一つの筋道だというようなことがあったけれども，それは，量の意味を捨象して実数に置きかえるというのが進歩の方向だということなんですかね．

齋藤　進歩とは書いていないつもりだけれども，数学というものが自立するというのはそういうことだと言っているわけ．

小島　いまあまりにも自立し過ぎているわけで，いまさらそんな自立のメリットをいう必要はないように思うんですよ．そのあとの経過をいうと，むしろ進む方向は逆なんで，1 次元は別として，多次元でいっても単に数の組あるいは2重インデック

スを持つ数の族，そういうものを扱っていた時期が長く続いたあとで，まず，共変と反変の区別，テンソルとしての形の違いというものが意識されたわけですね．そういう形で意識されたけれども，それは背後にある実在としての性格の違いってものが反映しているわけでしょう．そこでさらに20世紀になって，シュヴァレー以後になると，その背後にある実在そのものを表面に出して，内在的 (intrinsic) に扱うという段階に来ている．このように，現代の数学の進み方を見ると，すべてを数に解消するというのと逆の動きが進んでいて，もう一度実在と直接結びつくようになってきていると思うんです．

森　それはちょっといろいろあってね．まず非常に大きな歴史からいうと，行列以前の最初の話に帰りますけれども，数というものが確立することによって量がとらえやすくなったという面があるわけです，はっきり．同時に，量をとらえることによって数が確立したという面もあるんですね，16世紀から17世紀にかけて．

それからもう一つの問題としては，現在は普通の学校教育のやり方としては，これは理科の先生も含めてわりかた数を過度に利用しているという面はある．常に，量というと数値化されたものだという……．ところが，ちょっと実際のレベルが上がっていくと文字ばかり使うわけでしょう．文字ばかり使うときには，実際上は，物理学者は量そのもののイメージをかなり使っているわけね．そこら辺のギャップというものがおそらく中学校から高校あたりの理科教育での問題点に多分なっている．

それから，数学に関しても似たような現象がやっぱり並行して起こっている．線型代数そのものに関していうと，やはり基本的には行列は線型変換でしょう，ケイリーとかそういうのは．

歴史ということからいうと，形式を生み出している流れみたいなものがある．その形式的な面の有効性もあるけれども，その形式的な面を全面的に打ち出すことが，わりかた教育では伝統的に行われてきていたけれども，それがいいかどうかというのはかなり問題だと思う．自立し過ぎている云々というのは，そういうことにもあるんだ．しかしそういう自立したことのメリットということも当然あるわけ．

小島　でも，それはわかり切っているわけで，いまみたいに，何でも数量化するというのが支配的な精神みたいになっている時代に，いまさらそれを強調することもない．

森　でも，案外わかってないよ（笑），あまりにも日常化し過ぎているために．

小島　何が？

森　つまり，数量化というものがそういうふうにつくられてきたものだということがわかっていないのと同時に，数量化することが逆にメリットがあることもわかっていない．

小島　そうかな．ちょっと話は変るけれども，外延量，内包量というような分け方が問題で，いつもはっきり分けられるとは思えないというようなことを齋藤さんも書いているんだけれども，僕も，分け過ぎるというか，静止的(static)な概念になり過ぎているというふうに思う．一つの計算をやるときは三つ出てきますね．何とかを何とかで割ると何とかになるとか，掛けると何とかになるとか，そういう一つの計算の中の相対的な関係の概念なら意味がある．たとえば，距離を時間で割って速さというときは，最初に，ある距離と時間が外延量で，割り算というか，単位の商を単位として出てくるものが内包量，そういうことならわかるけれども……

森　そうですよ．

小島　森さんはそうかもしれないけれども，もっと固定的に，速度は内包量ということが，

速度＝距離÷時間

という文脈を離れて，何か速度という量そのものの性質みたいに述べられることが多いと思う．ところが実際には，数学の中で多様体の接空間とその双対というようなときに，速度というのは，代表的なもとの接空間のベクトルですね．だから，ある意味では，速度というのは典型的な外延量でさえある．それは，時間で割るということを無視しての話だけれども．たとえば

力×速度＝仕事率

というような計算の中では，速度というのはまさに外延量であるし，第一，力にしても――力というのは，銀林さんの本[7]なんか読むと，外延量というふうに書いてあるけれども，それは立場というか，どういう計算の枠で議論するかの問題であって，仕事を距離で割ったものとして仕事を基準に考えれば［物理では仕事の方が力よりも根元的だと思う．――後記］，力はまさに内包量であるし，力と変位の積として仕事をあとで導くという立場ならば，力は外延量であるかもしれない．

森　普通の

速さ×時間＝距離

というレベルでいうと，速さは，いうなら1行1列の行列だ．内包・外延というのは，どっちを共変で，どっちを反変にするかで変るけれども，ともかく共変と反変とが混合して n/m 行列というように，$/m$ が出て

くるから内包なのだ．

いまのような複比例型の場合は，

内包量×外延量＝外延量

という正比例型の掛け算ではなく複線型写像なんだから，それは掛け算として質が違う．だから，その場合は，

外延量×外延量＝外延量

になる．

小島　その場合，その場合というふうに森さん流にいえば，僕は理解するけれども［ただし，速さ×時間が比例型で 力×速さ が複比例型という固定的な分け方には賛成できない．――後記］普通は量そのものの固有の性質みたいにいわれていると思う．

森　そうかな．

小島　そうですよ．

森　いまの速度は外延量か云々かという問題は，速度ベクトルのような場合はいわば時間の方を凍結するから，実質上もちろん速度の外延的な性格だけが出てくるわけだよ．

小島　まさにそういうふうにいってもらえればわかるけれども．

森　それからもう一つは，歴史的に，これはボホナー［13］だけど，速度というものが外延量的に扱えるようになったことこそ微積分の起こりであるというのがボホナーの説でしょう．わりかた説得力のある説だと思う．

小島　ですから，普通に量の計算をやっていれば，どんなものでも掛けたり割ったりできるというか，自由に計算できるというのがいいわけで，一々量の固有な性格みたいにいわれると困る．

それからもう一つ，「速度というのは内包量だから足し算ができない」というふうなことがよく書いてある．「できないわけではないが」と書いたりね．

森　それは，ベースを共有しないとできないという意味でしょう．

小島　普通にいえば，速度というのは足すことができるし，何倍かすることもできるわけで，あんまりそういうことをいい過ぎると思う．

森　ただしその場合に，長さなんていうのはわりかた――この外延というのはデカルト的な意味でいま考えていただいて結構ですけれども，何となくくっついたという感じでできるけれども，速さの場合は，ベースがあって，時間のベースの上に何とかというふうになっているから，ベースが共有されている中で，たとえば相対運動とか，ベルト・コンベアの上で何か動くとか，そういう種類のメカニズムを考えないと，足し算はできない．

小島　たとえば，「手をつないで走っても速さは2倍にならない．このように足すことができない」とか，「時速30キロの汽車と時速40キロの汽車を連結しても時速70キロにならない．このように足し算ができない」というふうに書いてあったりする．でも，数学的な形式としての足し算があるかどうかということと，二つの機関車を連結してどうなるかというのは，全然違うことだし，連結すればどうなるかというのは複雑な現実の問題で，それはちょっと答えようがない．

森　それは結局，線型代数に戻っていえば，行列の足し算というのは，$Ax+Bx$ とせんならんでしょ，x 共有して．それと同じ問題じゃない？むしろ行列の演算に関しては，カテゴリー式にいうと，掛け算の方が本質的で，$Ax+Bx$ というのを使うときは $L(X;Y)$ を線型空間と考えるところで足し算しているわけでしょう．

小島　一応わかるけれども，一々，この場合には掛け算の方が大事だとか，足し算は副次的なものだとか，あんまり言わなくてもいいんではないかっていう気がするのが，一つですね．

齋藤　僕も全く同感だな．

小島　ちょっと理科と区別があいまいになっているようなところがある．

森　僕は，区別する必要はないという意見．

小島　たとえば，水の上に木を浮かべて重さの加法性がどうのといわれても，水に木を浮かべたらどうなるかというのは別の問題という感じがする．そういうこともあります．

いま僕がいったのは，ベクトルというか線型空間の元と見なされるものは基本的に同じなんで，計算の中での立場という違いはあるけれども，固有の性質みたいなものをあまり考えない方がいいということですが，逆に，区別すべきものが一緒くたに議論されている問題がある．温度と速度というのがよく並べられて，30度の水と40度の水をまぜても70度のお湯にはならぬというふうなことを書いてあるけれども，そんなことをいってもどうしようもない……．それが，さっきの列車の連結の問題と並べて書かれるわけだけれども，僕にいわせれば，速度を足したり何倍かするということは，はっきりした意味がある．どのようにして2倍の速度を実現するかということは別として，頭の中に2倍の速度というのは意識することができますね．ところが，温度というのは，きょうの気温はきのうの2倍だという人はいない．もともとある温度の2倍という概念が意味がないし，温度と温度を足すということが，本来意味がないですね．

齋藤　絶対零度から数えれば……

小島　それはそうだけれども，日常的な温度というのは絶対零度からの

ことではなくて，要するに直線上の目盛りというか位置として考える．

森　大体温度というのは非常にわかりにくくて，エントロピーとエネルギーとかいうことで……

小島　それはまた別の話で，要するに，温度というのは，アルコールとか水銀とかいう特定の物質に無関係な熱力学的な定義が確かにあるわけで，一応温度という概念があるとして今は話していいでしょう．そうすると，温度については位置の問題だから，アフィン的な量なんで……

森　アフィン的な量かな．

小島　そうですよ．僕のいっているのは，日常的な扱いの中における温度というのはアフィン的な量ということで，たとえば，30 度のお湯を何 cc と 40 度のお湯を何 cc 集めたらどうなるかということについては，アフィン結合（加重平均）という概念がある．つまり，アフィン空間にはそれなりの固有な計算があるわけで，それは，速度みたいなベクトル空間の演算と区別した方がいい．そういうところははっきりさせた方がいいと思う．

森　温度の足し算というのは，話として面白いから出すというだけであって，温度の内容自体は——エネルギーをエントロピーで割るのか？

齋藤　理科は知らない……

森　つまりよくいわれるけれど，足し算ができるかできないかという二分法的な分類は本来はナンセンスで，足し算をするときの量が，一番単純なレベルでは外延量で，比例定数になるときの量が，正比例における内包量なんだ，1 次元的には．

齋藤　そんな偶発的なものなら，大げさな名前をつけて論じなくてもよさそうな気がする．

森　偶発的じゃなくて，量自体というか，量の構造性そのものを問題にしているんだもの．正比例そのものが問題なんだから．

小島　一つの計算の中での役割りとしてそれを区別するのは有効だと思うんです．自立した単位に対して割ったときに，単位の商というのが新しい単位になるような量というのは，それは考えた方がいい．便利だと思う．けれども，何度もいうように，それは相対的な問題であって……

森　その場合に，速度の場合は等速運動というものがわりかた単純化されてあって，だから，速度が内包量というのはそのレベルで簡単にいえるけれども，温度が内包量ということの意味づけに関しては，現象論的に論じても意味がないわけで，もっと本質までいかなければいけないから当然統計力学までいかなければ意味がないと思う．

ただし，現象論的レベルとして数量化されていれば，差はあらゆるときに意味を持つんだ，比較さえすれば．

小島　だから，それはまさにアフィン的な量の特徴なんで，各温度のお湯をこれだけずつ混ぜれば何度になるというのは，まさにアフィン結合の計算そのものだし．

森　そういうことをいうと，5度加熱しさらに7度加熱するというのは，足し算として意味を持つわけよ．

小島　それはそうだ．温度差の足し算はできますよ．僕のいっているのは温度そのもののことで……

森　アフィン的な量というのは，かなり現象的に論じているにすぎなくて，その量はどういう構造性においてあるかということを全然問題にしていないんだから．アフィン空間というのは，その移動の群として，足し算のできる線型空間を持っているわけだけど，その線型空間の本質は何かと問うことが，量の構造だと思うんだ．

小島　それはここからここまでの高さというのは，それぞれが東京湾の満潮時の水位から何メートルだなんてことはいわないで，その差だけで議論できるのと同じで，日常的なやり方では，絶対零度に戻る必要はないでしょう．そういうふうな日常的な温度の構造というものをとらえそこなっているんじゃないか，どうせむずかしいものだというんで．

齋藤　それは物理なり化学なり，要するに自然科学としてきわめるのがむずかしいということで，それと数学として扱うときのと，同じにされちゃ困るんだな．

小島　それは賛成だな．だから，そういう意味では自立しなければならぬわけでね．

齋藤　そうですね．

小島　そうだけれども，僕がいっているのは，自立した上で，文法みたいなものを……

森　日常的なレベルでは，温度とか熱量というのは自立していないのだ

齋藤　だって，ちゃんといっていますよ．きょうはきのうより何度高いとか……

小島　ラジオ，テレビでもやるし，新聞にも書いてあるし，そういうものはきわめるまでは議論できぬというのは……

森　そんなことを言ったら，IQ だって世間では使っているじゃない？

小島　IQ なんて，どう考えたって量とは思えないし，線型代数の計算に乗るような量では当然ないわけでね．温度というのは一応アフィン的な計算の上に乗るわけですよ，日常的な扱いでは．IQ はどういう計算にも乗らないでしょう．

齋藤　乗ると思っているということですね，温度は……

小島　そういうものでいいわけでし

ょう，数学として扱うときには．

森　温度がなぜ乗るのかということを，問題にしたい．

齋藤　それは別の問題じゃないかな．

小島　それは別だと思う．

●ランクの齋藤式定義は技術主義的偏向であるか

森　根本的な問題になっちゃうんだけれども，「線型代数という名のもとに何を教えるかということには大いに関心を持っているが，どう教えるかということについてはそれほど関心がない」，何を教えるかということと，どう教えるかということが分離できるか，という問題……

齋藤　いや，僕もそれを書きながら，これはちょっとあとでまずいことになるんじゃないかと思っていたんですがね．(笑) 確かにあまり分離できないんです．だけど，論点が「どう」というところに集中するのは好ましくなくて，「何を」という方がいいだろう．たとえば，僕は計算技術というものをものすごく大事にしているわけで，そのために，森さんが攻撃していたランクの定義なんかもやるわけです．

森　あれを先にやるのは非常に評判が悪いよ．つまり，やはり次元としての意味をある程度つかんだ上で，計算法としてやる方が自然だというのが多いね．

齋藤　それはまた僕流で，意味づけはあとでちゃんと出てくる．

森　意味づけというのに少しこだわり過ぎているのではないかという感じがする．意味について議論し始めると，ちゃんとわからなければ進まんというふうには絶対ならんわけで，意味というのは，くどくどいうと，ほんまにしょうものうなってね．僕は，何もそういうことで意味を問題にしているのではなくて，それを置く状況みたいなものを含めての意味だと思う．それで，意味はあとからというのは，やはり根本的にはあるんだけれどもね．意味をごじゃごじゃいうんじゃなくて，何となく意味を含んだ格好で定式化すべきだというのが，僕の一般的なテーゼなんだ．

齋藤　ランクのことに関していえば，その直後に 1 次方程式をやるのだから，むしろそのためにやっているのだから，ちゃんとすぐ意味は出てくるんだ．

森　むしろ僕としては，ランクに関しては，次元というイメージをある程度先にした方がいいと思う．ほかの人の意見もわりあいそれが多い．次元という概念は漠然とした概念だから，とらえにくいといえばとらえにくいけれども．

齋藤　逆にいえば，次元という漠然とした概念は，大体大学に入ってくる人は持っている．自由度というようなものとして．それを，僕は本では書いていないけれども，教室ではずいぶん言うんです．大体，平らなものを扱っている限り，全部自由度で済むんだから，1 次方程式のところで次元の概念は説明しちゃうんです．だから，そこですでにランクは意味づけをされるわけです．

森　次元の概念は，必ずしも持っていないと思うな．おれは，このごろ試験に作文を出すことが多くて，たとえば「次元について」という作文を出したことがあるわけ．本に書いてある次元の定義などは全く書く必要はない．持ち込み試験だしね．「それについての自分の正直な頭の中を書け」．やっぱり出来はかなりひどいよ．(笑)

齋藤　それから，ついでに弁解すると，そこのところは，実はこの本の唯一のオリジナリティーのあるところなんでね．こういう基本変型というような計算的なやり方でちゃんとした証明をつけて，次元の不変性というのが証明できているわけですね．あとはそれを定式化すればいい状態にまでなっているわけです．

森　それは別に——たとえば僕の昔の本 [3] だって本質的には同じじゃない？

齋藤　いや，証明していないもの．

森　おれはこれで証明としては十分だと思う．

小島　像空間の次元として定義すれば，一意性も何もないんで，それでおしまいでしょう．

齋藤　線型空間の次元というのも，不変性というのがあるでしょう．

小島　あっ，そうか．

森　その議論は一応してはいるけれども，あれはいやらしいからね．

齋藤　それは，ただいってみたかっただけですから．

小島　僕は，その辺の議論，つまり線型写像の標準化や 1 次方程式のことは，普通の本よりもかなり抽象的に扱ったが，それは，いわば抽象化によって感覚化することをめざしたわけで，ここでも双対性を強調し，あとで全部電流と電圧で意味づけした．

齋藤　意味があとからくっつくというのは，大体言葉の習得というのはそういうものでしょう．赤ん坊が最初言葉をしゃべり出したり聞いたりするときは．

森　それは両方あるんじゃない？

齋藤　完全にあとからというわけじゃないけれども，最初は意味のないことを言っている．意味だけじゃなくて，そもそもちゃんと文節化した言葉になっていないのだが，それをやっているうちに，だんだんそうなるわけだからさ．

森　自然発生的になるんじゃないでしょう．僕は発達心理学の方の話はあんまり詳しくないけれども．

齋藤　自然発生的にじゃなくて，訓練によってなる．
森　必ずしも訓練じゃないんだな．訓練というか繰り返しではないんだな．やっぱり，ある種の幼児なりの意味づけられた世界というものがつくられていく過程と重なっている．それはただの訓練でできるわけないよ．常にそれなりの一つの世界を持っている．さっきの意味というのはそういう感じだもんね．彼にとっての世界をどう持つかという問題でしょう．比較的に形式的なことでも，その人間にとって世界を持てるということは，場合によってはあるわけだけれども，それをかなり強化しないと持てないという場合もあるんだと思う．ただ，強化という場合に，とことんまで意味にこだわりにこだわり抜くというのは，僕はわりかたそういう性格はないけどね．
齋藤　いや，あると思うな．
森　そうかな．たとえば吉沢尚明に比べれば，おれははるかにない．吉沢尚明のゼミに出ると，しばしば中断して，意味について考察しよう，などと言いだす．あるいは雨宮一郎とか．ああいう意味派の人がいるわけ．

●優等生および意味オンチの反省

森　実は何を隠そう，僕はわりかた齋藤さんと似たパターンであるのよ．わりかたすらすらと，ほどほどに要領よくやるという優等生ではあるわけ．だから僕は，何でもすいすいのみ込み，そこら辺の本をかじり，それで学校ぐらいはそこそこ間に合ってきた．しかし，それはむしろ悪いことではないかという気持ちが僕にはある．
齋藤　そういう風潮が一方ではあるわけでしょう．僕もずいぶんそれに関する反省を強いられているわけなんだけれども，ちょっと開き直るとこうなるわけですよ．(笑) しかし，一方では小島君の本を二度読み，何回も話を聞いているうちに，これはもっともどころか偉大な試みであるような気がしてきてもいるのです．
森　現実に読者の学生にしたら，むやみに意味にこだわり抜く人もいてもいいけれども，あんまりこだわられたら迷惑するんではなかろうかという気があると同時に，近ごろの学生さんは，僕ら以上にこだわらなさ過ぎる．たとえば僕らのような，ちょっとしたうしろめたさすら持たないんではないか．それが僕にはむしろ気になるんだ．どう教えるかという問題に関していうと，案外，こういう規則でございますというのが受け入れやすい部分が学生の中にもあって，それはむげに退けがたいような気持もなくはない．その一方で，ある程度意味にこだわらんといかんような気もする．しかし身は一つで，ジレンマに悩みながらやっている．僕は，教師というものはもっとジレンマを持たなければいけないものである，それの反映として，学生の方もジレンマを持たなければいけないのではないかという主張があってね．
齋藤　僕も，小島君の言うとおり，隠れたところで気にはしているんだ．
小島　隠れたところを表に出されると頭にくるとは，どういう……
森　みずからの恥部にさわられたごとく……(笑)

(1977 年 4 月 23 日午後)

●参考文献

[1] 小島順『線型代数』日本放送出版協会
[2] 齋藤正彦『線型代数入門』東京大学出版会
[3] 森毅『マトリックス』明治図書
[4] 森毅『現代数学と数学教育』裳華房
[5] 佐武一郎『線形代数学』(旧版『行列と行列式』) 裳華房
[6] 有馬哲『線型代数入門』東京図書
[7] 銀林浩『量の世界／構造主義的分析』麦書房
[8] 竹内啓『線形数学』培風館
[9] 竹内啓・森毅『数学の世界』中央公論社 (中公新書)
[10] 遠山啓『ベクトルと行列』日本評論社
[11] 遠山啓(編)『歩きはじめの算数』国土社
[12] 遠山啓 (監修)『わかるさんすう』1~6　麦書房
[13] ボホナー (村田全訳)『科学史における数学』みすず書房
[14] 齋藤正彦「論争を呼ぶ本」([1] の書評)『数学セミナー』1976 年 9 月号