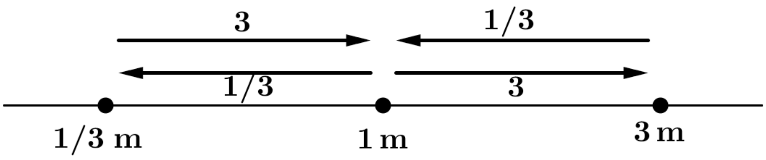
2019/06/29　　白楽サークル＠神奈川大学　　　　　　　　　　　　　　　　小島 順

小数の割り算・量の割り算は分数の形式で

「数学教室」2019年7月号の
和泉 康彦　　小数 ÷ 小数 の意味を考えるプリント
の題材とデータをそのまま借用した。私なりの「数学をする」スタイルの実例を5枚の「図と式」の形で提示する。それぞれに，言葉による「考察」を添える形とした。
図示自身が半ば数式の一種となっている。点と矢線の枠組みで計算（掛け算，割り算）の構造を示している。掛け算の矢線が主体なので，必然的に直線の目盛りは対数目盛りに。
数式は分数の形を一貫して使う。量そのものを分母と分子におく”量分数” である。その一つ前の段階として，分母と分子に（整数を超えて）有理数や実数をおく分数がある。



図と式 1
3 と 1/3 は互いに逆

$$\textbf{(1-1)}\quad 3 \times \frac{1}{3} = 1, \quad \frac{1}{3} \times 3 = 1,$$

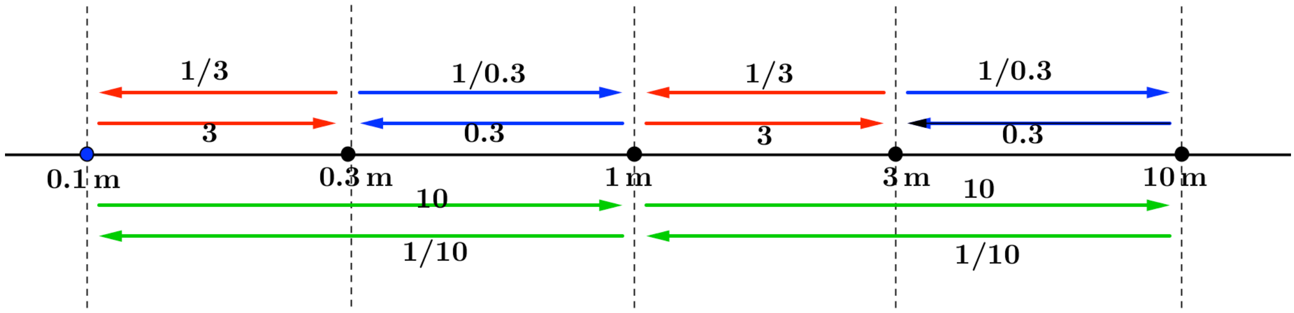
$$\textbf{(1-2)}\quad 1\,\mathrm{m} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ \mathrm{m}, \quad 1\,\mathrm{m} \times 3 = 3\,\mathrm{m},$$

$$\textbf{(1-3)}\quad 3\,\mathrm{m} \times \frac{1}{3} = 1\,\mathrm{m}, \quad \frac{1}{3}\ \mathrm{m} \times 3 = 1\,\mathrm{m},$$

$$\textbf{(1-4)}\quad \frac{3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1/3\,\mathrm{m}} = 3. \quad \frac{1\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}} = \frac{1/3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = \frac{1}{3}$$

図と式 1　についての考察

1　この図示は<u>対数による図示</u>である。
2　点と矢線の枠組みを使っている。矢線が主役である。
3　矢線 3 は掛け算 ×3 として 点 1 m に作用し，1 mを点 3 m に変えている（運んでいる）。
4　点 1/3 m に作用して 1 m に運ぶときも矢線 3 は同じ大きさに描かれてる。
5　矢線 1/3 は 矢線 3 と同じ大きさで向きが逆　$\log 3 - \log 1 = \log 1 - \log 1/3 = \log 3$ である。この矢線に沿う前進 ×1/3 は矢線 3 に沿う後退 ÷3 に一致する。
6　式 (1-4) の第二式において，分数 1/3 は二つの長さの比（包含除の延長）として現れ る。 式 (1-2) と式 (1-3) の第一式において，分数 1/3 は矢線として，等分除（”３等分” という作用）として現れる。その作用の結果である (1-2) の第一式の右辺の 1/3 m という長さは（矢線との対比で）点として位置づけられる。



図と式 2
0.3 と 1/0.3 は互いに逆

$$(2\text{-}1)\quad \frac{3\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m}} = \frac{0.3\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = \frac{3}{10} = 0.3,$$

$$(2\text{-}2)\quad 10\,\mathrm{m}\times 0,3 = 10\,\mathrm{m}\times\frac{1}{10}\times 3 = 1\,\mathrm{m}\times 3 = 3\,\mathrm{m},$$

$$(2\text{-}3)\quad 1\,\mathrm{m}\times 0.3 = 1\,\mathrm{m}\times\frac{1}{10}\times 3 = 0.1\,\mathrm{m}\times 3 = 0.3\,\mathrm{m}$$

$$(2\text{-}4)\quad \frac{10\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0.3\,\mathrm{m}} = \frac{10}{3} = \frac{1}{0.3},$$

$$(2\text{-}5)\quad 3\,\mathrm{m}\times\frac{1}{0.3} = 3\,\mathrm{m}\times\frac{1}{3}\times 10 = 1\,\mathrm{m}\times 10 = 10\,\mathrm{m},$$

$$(2\text{-}6)\quad 0.3\,\mathrm{m}\times\frac{1}{0.3} = 0.3\,\mathrm{m}\times\frac{1}{3}\times 10 = 0.1\,\mathrm{m}\times 10 = 1\,\mathrm{m}$$

図と式 2　についての考察

1　分数という表現形式は普遍的である。その分母・分子の位置に置かれる対象物は（整数に始まったとしても）大きく拡張される。

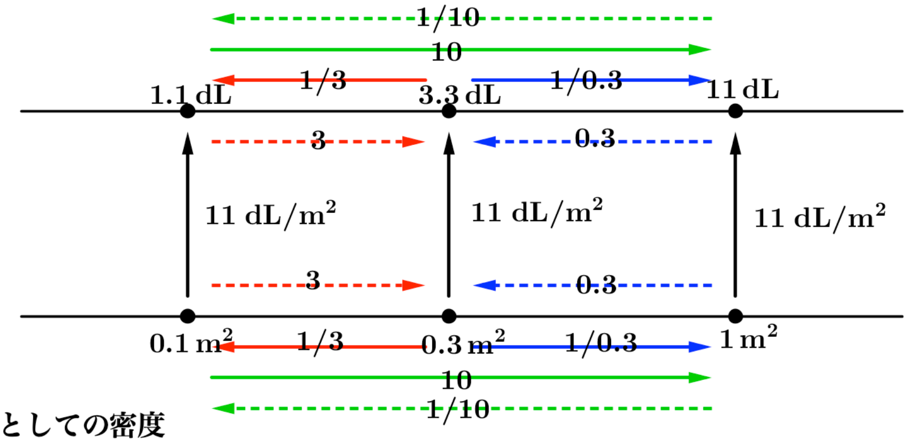
2　式 (2-1) では分母・分子 が数でなく長さという量である。この分数は二つの長さの比を定める。基本法則は「分母・分子に同一の数を掛けても比は不変」である。この比（包含除の延長）は小数 0.3 （分数 3/10 に等しい）である。

3　式 (2-2), (2-3) に見るように，比 0.3 は分母に作用して分子に変える（運ぶ）。これが比の意味である。

4　0.3 の逆は $\frac{1}{0.3} = 1/0.3 = (0.3)^{-1}$ という3通りの記法がある。それは (2.1) の<u>分子を分母へ</u> 運ぶ作用であり，(2.4) では（分母と分子が交換されて）<u>分母を分子へ</u> の作用となっている。それ自身の分数表現でも，　$0{,}3 = \frac{3}{10}$,　$\frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$　と分母・分子が交換されている。

5　(2-5), (2-6) では 1/0.3 が（0.3 とは逆向きに）3 m を 10 m に，0.3 m を 1 m に運ぶことを確かめている。
和泉さんの “0.3 等分”に当たるのがこの ×1/0.3 である。

6　図に注目する。矢線 0.3 と 1/0.3 （青色）同じ大きさで向きが逆である。また，置かれた位置に関係なく同じ大きさである。それを実現するのが対数目盛り。



図と式 3
量の分数としての密度

$$\text{(3-1)}\quad \frac{3.3\,\mathrm{dL}}{0.3\,\mathrm{m}^2}=\frac{3.3\,\mathrm{dL}\times 1/0.3}{1\,\mathrm{m}^2}=\frac{11\,\mathrm{dL}}{1\,\mathrm{m}^2}=11\ \mathrm{dL/m}^2,$$

$$\text{(3-2)}\quad \frac{3.3\,\mathrm{dL}}{0.3\,\mathrm{m}^2}=\frac{1.1\,\mathrm{dL}}{0.1\,\mathrm{m}^2}=\frac{11\,\mathrm{dL}}{1\,\mathrm{m}^2}=11\ \mathrm{dL/m}^2,$$

$$\text{(3-3)}\quad 11\ \mathrm{dL/m}^2=\frac{11\,\mathrm{dL}}{1\,\mathrm{m}^2}=\frac{11\,\mathrm{dL}\times 0.3}{0.3\,\mathrm{m}^2}=\frac{3.3\,\mathrm{dL}}{0.3\,\mathrm{m}^2},\quad 0.3\,\mathrm{m}^2\times 11\ \mathrm{dL/m}^2=3.3\,\mathrm{dL},$$

$$\text{(3-4)}\quad 11\,\mathrm{dL/m}^2=\frac{11\,\mathrm{dL}}{1\,\mathrm{m}^2}=\frac{3.3\,\mathrm{dL}}{1\,\mathrm{m}^2\times 3.3\,\mathrm{dL}/11\,\mathrm{dL}}=\frac{3.3\,\mathrm{dL}}{0.3\,\mathrm{m}^2},\quad 3.3\,\mathrm{dL}\div 11\,\mathrm{dL/m}^2=0.3\,\mathrm{m}^2$$

図と式 3 についての考察

1　式 (3-1) の分数は”量分数” である。この量分数は，分母の面積を分子の液量（体積）に送るころで定まる比例関数（それは比例係数と対応する）。$0.3\,\mathrm{m}^2$ 当たりと $1\,\mathrm{m}^2$ 当たりの二つの方法で，同一の密度 $1.1\,\mathrm{dL/m}^2$ を表現している。分母が $0.3\,\mathrm{m}^2$ から $1\,\mathrm{m}^2$ へ，$\times 1/0.3$ で移るので，分母にも同じ $\times 1/0.3$ が作用する。

2　式 (3-2) では $1/0.3 = 1/3\times 10$ と分解している。

3　式 (3-3) では密度の分数表現の分母 $1\,\mathrm{m}^2$ を $0.3\,\mathrm{m}^2$ に変えて，その時の分子 $3.3\,\mathrm{dL}$ を求めている。

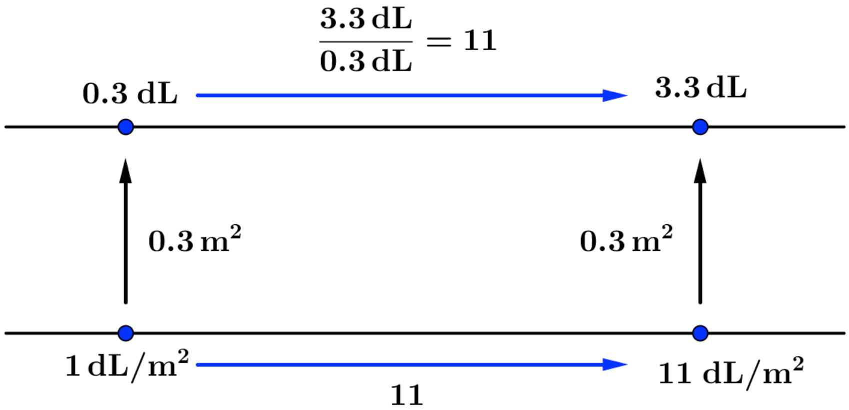
4　式 (3-4) では逆に，分子 $11\,\mathrm{dL}$ を $3.3\,\mathrm{dL}$ に先に変えて，その時の分母 $0.3\,\mathrm{m}^2$ を求めている。

5　図においては，面積の直線（対数目盛り）と液量の直線が平行に置かれている。双方に同じ矢線 $1/0.3$ があり対応している。その分解 $1/0.3 = 1/10\times 3$ も図で示されている。

6　縦の矢線は三つとも $1.1\,\mathrm{dL/m}^2$ である。それが置かれた場所ごとに，分母・分子の対応を量分数（の外形）として明示すると,それぞれ $1.1\,\mathrm{dL}/0.1\,\mathrm{m}^2$，$3.3\,\mathrm{dL}/0.3\,\mathrm{m}^2$，$11\,\mathrm{dL}/1\,\mathrm{m}^2$ となる。言うまでもなく，この三つの量分数は（外形の違いにも関わらず）同一である。

(7.77, −6.71)

図と式 4
逆作用 $(0.3\,\mathrm{m}^2)^{-1}$ の適用



(4-1) $\quad 3.3\,\mathrm{dL} \div\ 0.3\,\mathrm{m}^2 = 11\,\mathrm{dL/m}^2,$

(4-2) $\quad 1\,\mathrm{dL/m}^2 \times\ 0.3\,\mathrm{m}^2 = 0.3\,\mathrm{dL},$

(4-3) $\quad \dfrac{3.3\,\mathrm{dL}}{0.3\,\mathrm{dL}} = \dfrac{3.3}{0.3} = \dfrac{3.3 \times 10/3}{1} = \ 11,$

(4-4) $\quad 3.3\,\mathrm{dL} \div\ 0.3\,\mathrm{m}^2 = 3.3\,\mathrm{dL} \times (0.3\,\mathrm{m}^2)^{-1} = 1\,\mathrm{dL/m}^2 \times 11 = \ 11\,\mathrm{dL/m}^2$

(13.13, −13.59)

図と式 4 の考察

1 下に密度の直線，上に液量の直線がある

2 密度と 面積の立場を交換する。面積 $0.3\,\mathrm{m}^2$ を固定し，変量である密度に比例関数として作用するものとする。

3 式 (4-2) に見るように，$0.3\,\mathrm{m}^2$ は密度 $1\,\mathrm{dL/m}^2$ に作用して，液量 $0.3\,\mathrm{dL}$ に運ぶ。

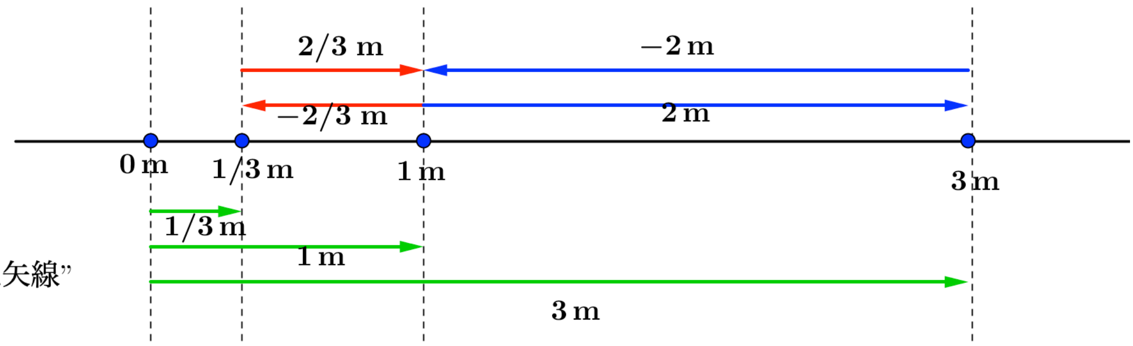
4 式（4-3）は比の計算（包含除）によって，倍率 11 を求めている。

5 式 (4-4) は $\times 0.3\,\mathrm{m}^2$ の逆作用 $\div 0.3\,\mathrm{m}^2 = \times (0.3\,\mathrm{m}^2)^{-1}$ によって，$3.3\,\mathrm{dL}$ が $11\,\mathrm{dL/m}^2$ に運ばれることを示している。

6 矢線 $0.3\,\mathrm{m}^2$ の逆向き矢線を描くことなく，矢線 $0.3\,\mathrm{m}^2$ の逆行（それに沿う後退）が 逆作用 $\div 0.3\,\mathrm{m}^2 = \times (0.3\,\mathrm{m}^2)^{-1}$ である，という扱いをここではしている。

7 図と式 3 と 図と式 4 は “同じ計算” を二つの方法で実現している。一つは 比 $\dfrac{3.3\,\mathrm{dL}}{0.3\,\mathrm{m}^2} = 11\,\mathrm{dL/m}^2$ であり，もう一つは面積で割ること（面積の逆を掛けること）$3.3\,\mathrm{dL} \times (0.3\,\mathrm{m}^2)^{-1} = 11\,\mathrm{dL/m}^2$ であった。この論点は普遍的である。

8 密度の単位の書き方は $\mathrm{dL/m}^2$ の他に $\mathrm{dL\ m}^{-2}$ あるいは $\mathrm{dL} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ がある。これは面積に左から作用にし，$1\,\mathrm{m}^2$ を 1 に，つぎに 1 を $1\,\mathrm{dL}$ に運ぶ。



図と式 5
加法に関する“点と矢線”

$$(5\text{-}1)\quad \mathbf{1\,m} + \overrightarrow{\mathbf{2\,m}} = \mathbf{3\,m},\quad \mathbf{3\,m} - \overrightarrow{\mathbf{2\,m}} = \mathbf{1\,m},\quad \mathbf{3\,m} - \mathbf{1\,m} = \overrightarrow{\mathbf{2\,m}},$$

$$(5\text{-}2)\quad \mathbf{1\,m} + \overrightarrow{\mathbf{-2/3\,m}} = \mathbf{1\,m} - \overrightarrow{\mathbf{2/3\,m}} = \mathbf{1/3\,m},\quad \mathbf{1/3\,m} - \overrightarrow{\mathbf{-2/3\,m}} = \mathbf{1/3\,m} + \overrightarrow{\mathbf{2/3\,m}} = \mathbf{1\,m},$$

$$(5\text{-}3)\quad \mathbf{1/3\,m} - \mathbf{1\,m} = \overrightarrow{\mathbf{-2/3\,m}},$$

$$(5\text{-}4)\quad \mathbf{0\,m} + \overrightarrow{\mathbf{1/3\,m}} = \mathbf{1/3\,m},\quad \mathbf{0\,m} + \overrightarrow{\mathbf{1\,m}} = \mathbf{1m},\quad \mathbf{0\,m} + \overrightarrow{\mathbf{3\,m}} = \mathbf{3\,m},$$

図と式 5 に関する考察

1　図と式 1 と共通の三つの点 1 m, 3 m, 1/3 m を使って，加法的構造を示した。「参考のため」に過ぎず，これまでの議論と関係はない。
2　矢線は”本当の矢線”すなわちベクトルである。
3　点と矢線が図では同じ記法になっているが，式では点と区別するために，矢線には上付きの矢線を添えた（ \overrightarrow{} ）。
4　式 (5-1) と (5-2) では　”点＋矢線＝点”，“点−矢線＝点” を，式 (5-3) では “点−点＝矢線” を扱った。
5　緑色で”位置ベクトル” を補足した。図と式 1 の矢線 3 と1/3 は大きさが同じで向きが逆だったが，3 m と 1/3 m は大きさの比が 1 : 9 で向きが逆である。

あとがき

和泉さんの論考についての（少しの）コメント
1　÷ 0.3 等分　について
等分 の概念を拡張して 0.3 等分を考えるのは，自然なことでむしろ当然の方向。しかし，それは「÷ 0.3 についての 0.3等分のイメージ」であって，「÷ 0.3 等分」は日本語としておかしい（数学以前に）。どのように 0.3 等分をイメージするか，については，私なりの方向を「図と式　2」で述べた。
2　小人の 0.1 人，0.3人　について
どういう属性において「10人で1人となる」かを明示した方がよい。ここではジュースを皆で分けるという場面で，「（標準の）1人分のジュースの 0.1 だけを貰う」という設定(その人の位置付け）のことを指して 0.1 人と言っている。身長や体積は関係がない。0.3 人は 「1人分のジュースの 0.3 だけもらう」資格の人である，それをはっきりさせた方がよい。