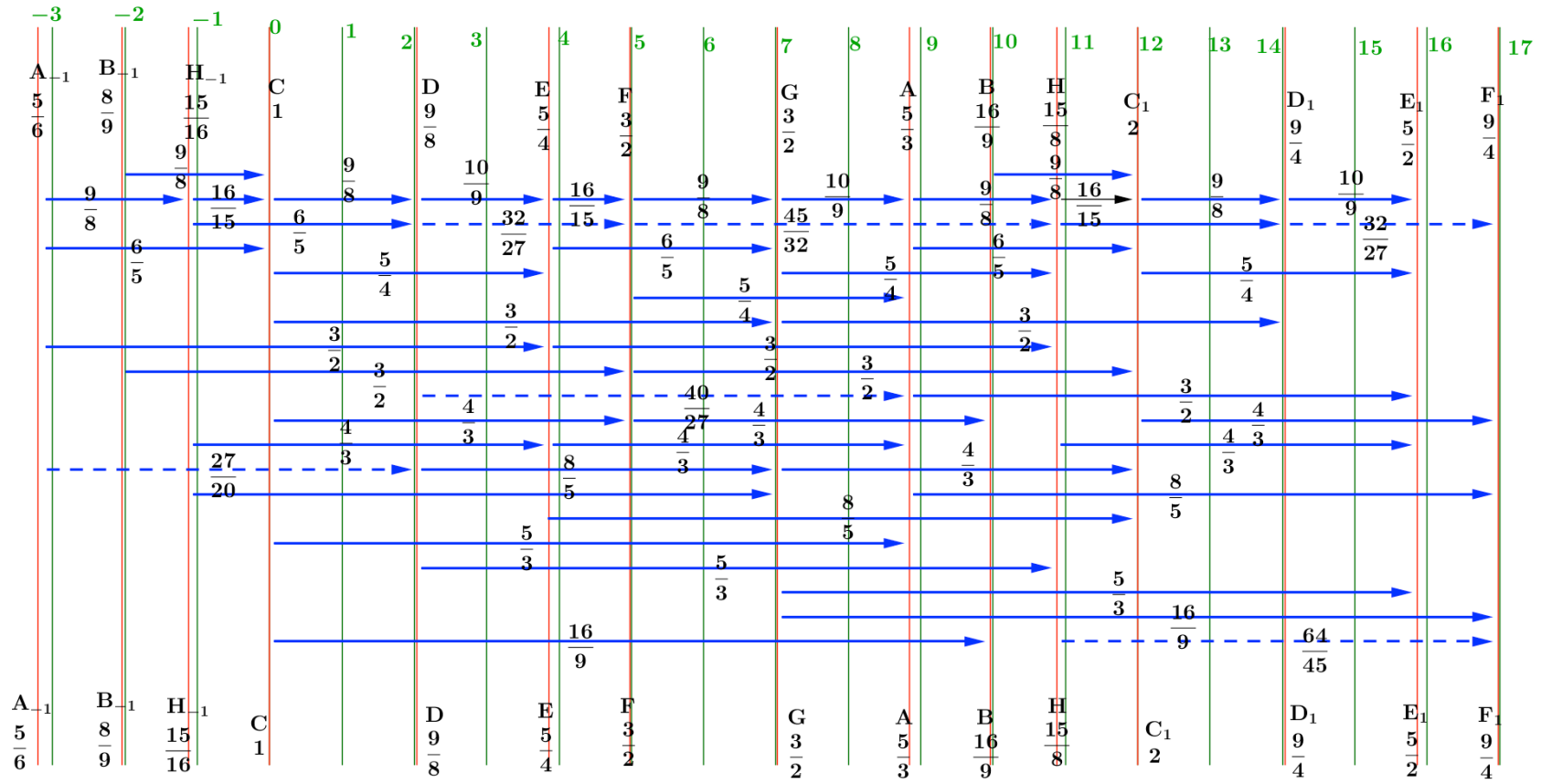


### 音高と音程の数学的枠組み



音程と音高の対数表示 縦の赤い線は「純正」の音高（振動数比），緑の等間隔の線は平均律の音高で，オクターブを12等分している。横の青の矢線は「純正」の音程。乗法的に分数計算をしている。3枚目に表がある。

長3度  $\frac{5}{4} = \frac{E}{C} = \frac{A}{F} = \frac{H}{G} = \frac{G_1}{C_1} = \dots$   
 短3度  $\frac{6}{5} = \frac{C}{A_{-1}} = \frac{D}{H_{-1}} = \frac{G}{E} = \frac{C_1}{A} = \dots$   
 完全5度  $\frac{3}{2} = \frac{E}{A_{-1}} = \frac{F}{B_{-1}} = \frac{G}{C} = \frac{H}{E} = \frac{C_1}{F} = \frac{D_1}{G} = \frac{E_1}{A} = \dots$   
 完全4度  $\frac{4}{3} = \frac{E}{H_{-1}} = \frac{F}{C} = \frac{G}{D} = \frac{A}{E} = \frac{B}{F} = \frac{C_1}{G} = \frac{E_1}{H} = \frac{F_1}{C_1} = \dots$   
 短6度  $\frac{8}{5} = \frac{G}{H_{-1}} = \frac{C_1}{E} = \frac{F_1}{A} = \dots$   
 長6度  $\frac{5}{3} = \frac{A}{C} = \frac{H}{D} = \frac{E_1}{G} = \dots$   
 短7度(小)  $\frac{16}{9} = \frac{B}{C} = \frac{F_1}{G} = \dots$   
 全音(大)  $\frac{9}{8} = \frac{D}{C} = \frac{G}{F} = \frac{H}{A} = \dots$   
 全音(小)  $\frac{10}{9} = \frac{E}{D} = \frac{A}{G} = \dots$   
 半音  $\frac{16}{15} = \frac{F}{E} = \frac{C_1}{H} = \dots$

(1)  $\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{2}, \frac{6}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{2},$   
 (2)  $\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{5}{4}, \frac{10}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{5}{4},$   
 (3)  $\frac{16}{15} \times \frac{9}{8} = \frac{6}{5}, \frac{9}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{6}{5}, \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{32}{27},$   
 (4)  $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2, \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2,$   
 (5)  $\frac{5}{4} \times \frac{8}{5} = 2, \frac{5}{3} \times \frac{6}{5} = 2,$   
 (6)  $\frac{6}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{8}{5}, \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$   
 (7)  $\frac{3}{2} \times \frac{32}{27} = \frac{16}{9}, \frac{5}{4} \times \frac{64}{45} = \frac{16}{9},$   
 (8)  $\frac{9}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{45}{32}, \frac{45}{32} \times \frac{64}{45} = 2$

- (1)  $4 + 3 = 7, 3 + 4 = 7;$
- (2)  $2 + 2 = 4, 2 + 2 = 4,$
- (3)  $1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3, 2 + 1 = 3,$
- (4)  $7 + 5 = 12, 5 + 7 = 12,$
- (5)  $4 + 8 = 12, 9 + 3 = 12,$
- (6)  $3 + 5 = 5 + 3 = 8, 5 + 4 = 4 + 5 = 9,$
- (7)  $7 + 3 = 4 + 6 = 10,$
- (8)  $2 + 4 = 6, 6 + 6 = 12$

- (1) 長3度 + 短3度 = 完全5度, 短3度 + 長3度 = 完全5度,
- (2) 全音 + 全音 = 長3度,
- (3) 半音 + 全音 = 全音 + 半音 = 短3度,
- (4) 完全5度 + 完全4度 = 完全4度 + 完全5度 = 8度,
- (5) 長3度 + 短6度 = 8度, 長6度 + 短3度 = 8度,
- (6) 短3度 + 完全4度 = 短6度, 完全4度 + 長3度 = 長6度,
- (7) 完全5度 + 短3度 = 長3度 + 減5度 = 短7度
- (8) (大)全音 + 長3度 = 増4度, 増4度 + 減5度 = 8度

左上： 音高の比の分数（同値類）として音程の矢線が定まる。  
 左下： 対数による加法化。平均律による近似で単純化される。

右上： 音程の積は和音。現実には一つの音高に適用した形で存在する。  
 右下： 標準的な音楽理論での音程の呼び方。