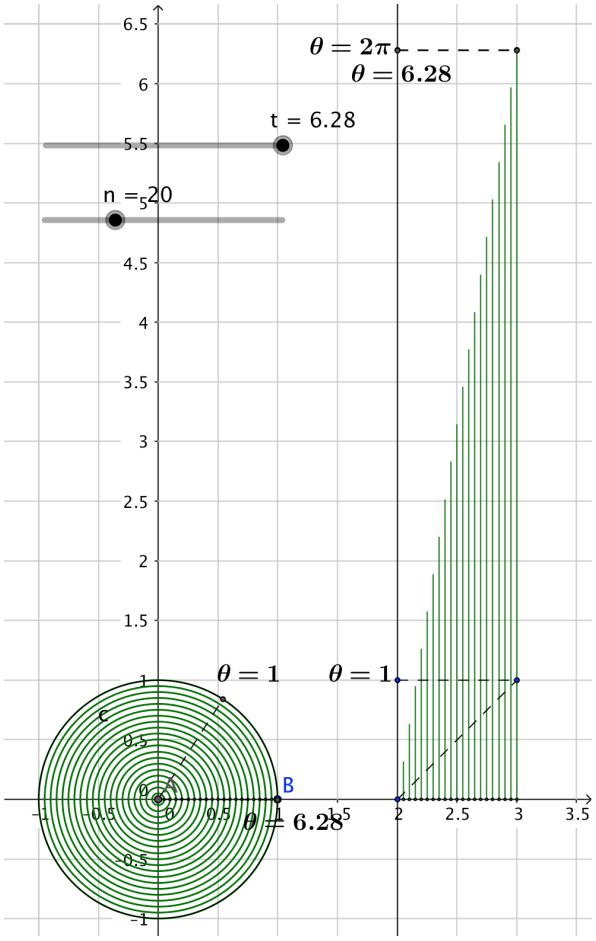
2017/05/27　　白楽サークル@神奈川大学

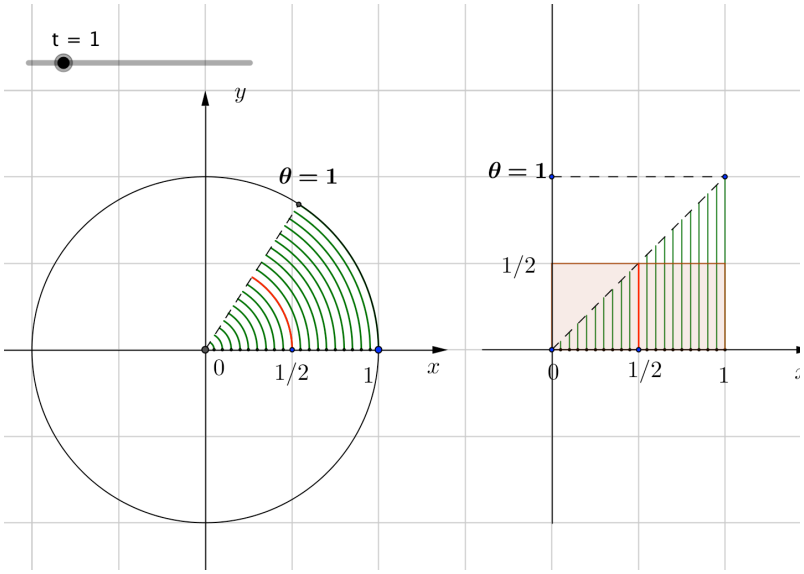
小島 順

回転体の体積とPappus-Guldin の定理

1　　円の面積

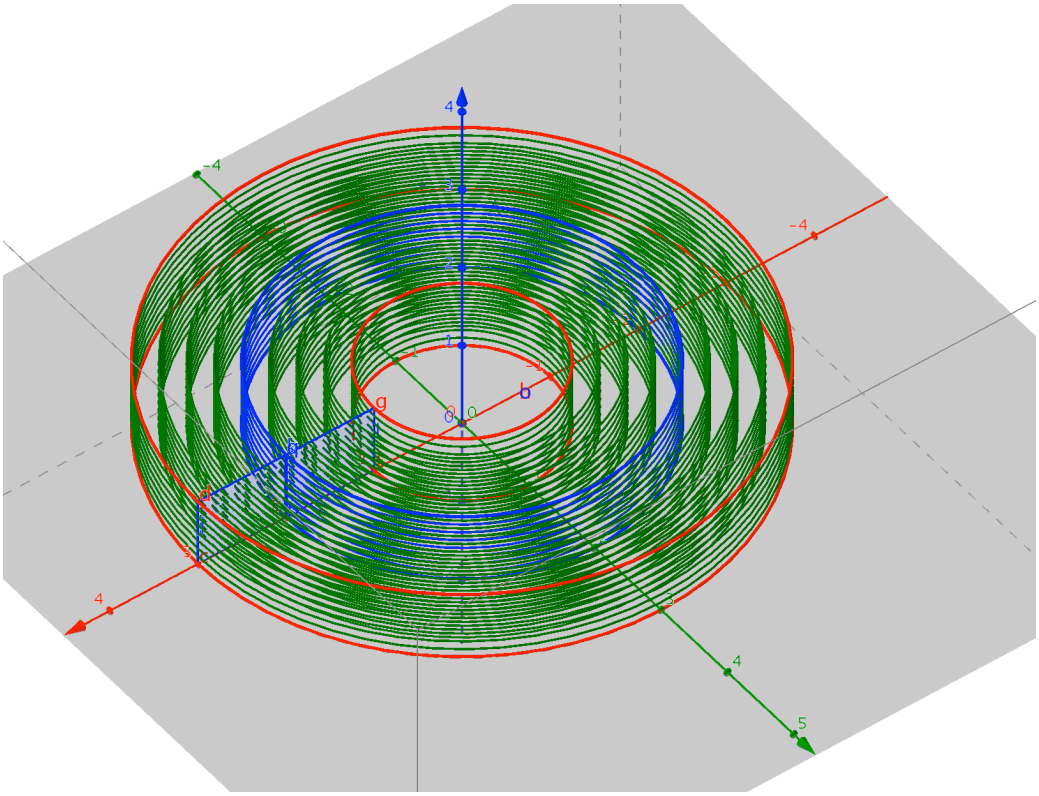


単位円で考える。x軸上の点 x から出発する糸の伸びは $\theta \mapsto x\theta$ である。 それは θ をパラメータとする等速運動で，$\theta = 1$ 当たりの弧長として，速さが x となる。
縦軸との距離と糸の伸長の速さがともに x で一致している。
弧長を測るとはそれを直線化することである（rectify）。右側にそれを描いた。
直線化で面積は変わらない！
$\theta = 1$ までで止めた部分を破線で示し，下の図でそれを拡大した。全体の面積はその 2π 倍である。
下の図の右側で，三角形の面積は軸からの平均距離 1/2 での速さ 1/2 と幅 1 が定める長方形の面積 1/2 に等しい。
$\theta = 2\pi$ に対応する三角形の面積が $1/2 \times 2\pi = \pi$ であり，これが単位円の面積。それは 底辺 1 と 高さ $1/2 \times 2\pi = \pi$ の長方形の面積でもある。



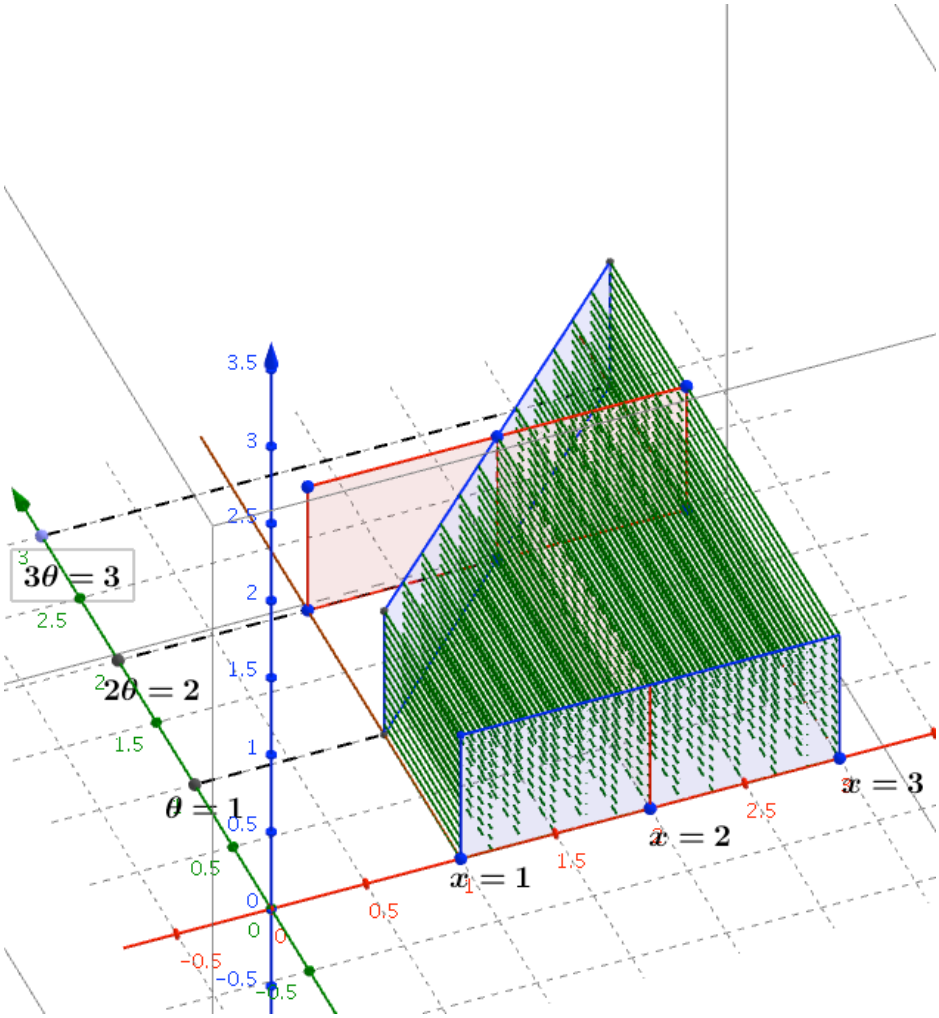
（円に戻れば，縦軸との平均距離 x = 1/2 の点を通る円周 π が長方形の高さ π に対応している。）

2　　バウムクーヘン



x-z 平面による切り口の長方形が見える。 x ＝1 と x=3 の間にある。高さは h= 0.8 としている。面積が 2h。この長方形の各点から糸が垂直方向に伸びる。弧度法による角の測度（measure）θ は単位円上で弧長 を測る数値である。長方形上の点 (x, z) を通る糸の伸びは $x\theta$ で，θ をパラメータとして糸の長さ（先端の点）は等速運動，その ”速さ”は”$\theta=1$ 当たりの弧長 x” として， z軸からの距離 x に等しい。糸の伸びは 緑の円周で示している。回転軸（ z 軸）からの距離 x の平均は x= 2 である。この平均距離を実現する点 (2, z) が初期長方形の縦の線分として見える。それから出発する青い円柱が見える。そこでは糸は速さ 2 で伸びている。
次ページでは，この糸の動きを直線化する。

3　　バウムクーヘンの直線化



x-z 平面の断面の長方形から糸が伸びる。初期点 (x,z) からは，y 軸方向に，θ をパラメータとして，等速 $\theta \mapsto y = x\theta$ で走る。速さが x （すなわち，回転軸の z軸からの距離）に等しい。

図では $\theta = 1$ で止めている。”$\theta = 1$ 当たりの進む距離” として，x は糸が伸びる”速さ”を表している。

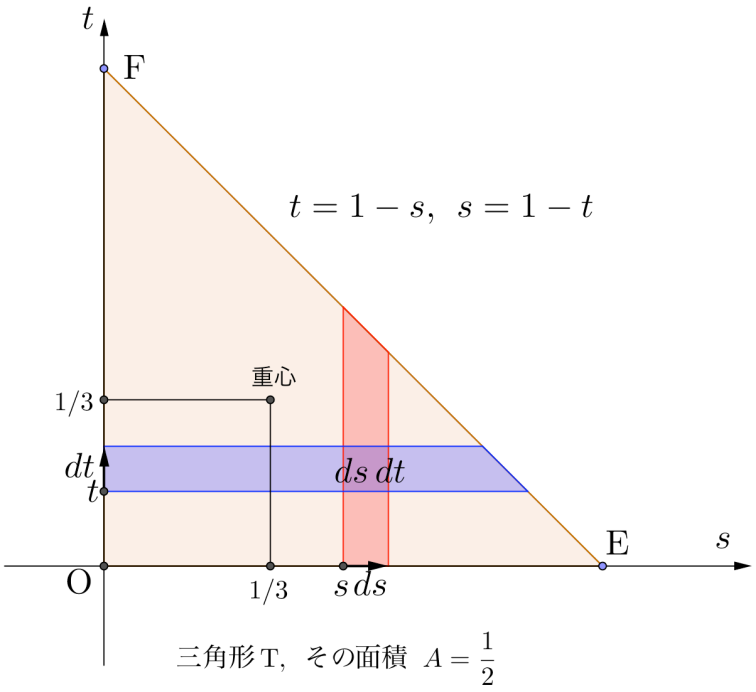
台形柱の体積が ”$\theta = 1$ 当たりの体積” である。 バウムクーヘンの高さを h とする（今は h = 0.8）。初期長方形 の面積が　2h。 速さ（すなわち軸からの距離）の平均は x =2 である。この速さは縦の赤い線分 (2, z) の上で実現されている。台形柱の体積は $2h \times 2 = 4h$ である。

$\theta = 2\pi$ 分の体積は その 2π 倍で $2h \times 2 \times 2\pi = 8\pi$ である。これを $2h \times 4\pi$ と括るならば，

“初期断面積” × “軸からの平均距離を実現する点の軌跡” の形となる。

4 円錐の体積

準備：断面の三角形の，回転軸からの距離の平均



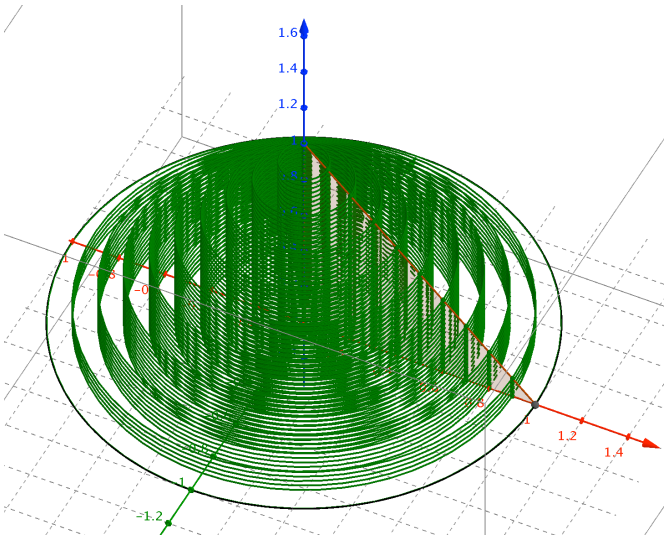
図は s - t 平面となっているが，x - z 平面として後で適用する。重心は，点とベクトル（矢線）の対比において，点に関する概念であるが，ここでは”回転軸との距離の平均”という際立ってベクトル的な概念として現れる。

縦軸からの距離 s を重み 2 ds dt 付きで平均する。2 は面積の　1/2 で割った結果である。

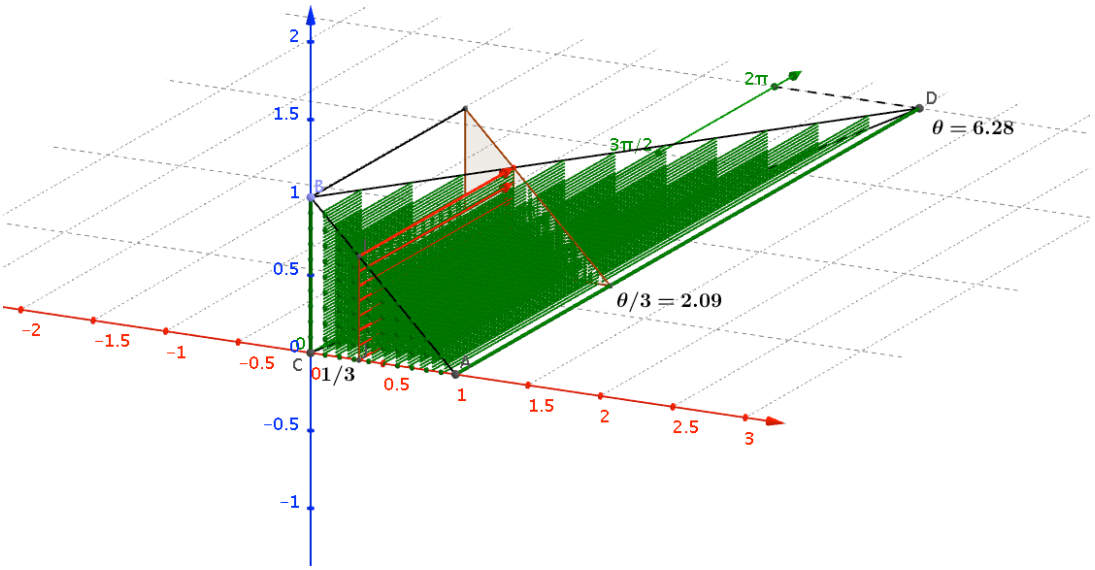
$$\iint_{\mathrm{T}} s \cdot 2ds\, dt = \int_{s=0}^{1} s \cdot 2(1-s)\, ds = \int_{0}^{1} (2s - 2s^2) ds = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

座標が (1/3, t)という縦の線分上で，この 平均距離 1/3 をとる。同様に 横軸からの距離の平均は t = 1/3 で，線分 (s, 1/3) 上の各点で，こ/3の平均距離 1/3 をとる。二つの線分の交点 (1/3, 1/3) が重心である。これを $\frac{1}{3}\mathrm{O} + \frac{1}{3}\mathrm{E} + \frac{1}{3}\mathrm{F}$ と書くときの係数 1/3 の意味など，点概念としての重心はここでのベクトル的考察とは異質である。

三角錐を断面の三角形から伸びる糸の集合と捉える。



糸の直線化



これは $\theta = 2\pi$ のときの図。この三角錐の体積は底三角形の面積 1/2 と回転軸との距離の平均の 1/3 と θ の倍率 2π の積 $1/2 \times 1/3 \times 2\pi = \pi/3$ となる。ここでも本質は 回転軸からの距離が θ に伴う糸の伸長速度に等しく，距離の平均も伸長速度の平均に等しいことにある。もう一つ，$\theta = 1$ までの回転体の体積は断面の面積と軸からの距離の平均との積に等しいこと，この二つが本質的。

$$\iiint_{\mathrm{B}} dx\,dy\,dz = \iint_{\mathrm{T}} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} x\,d\theta \right) dx\,dz = 2\pi \iint_{\mathrm{T}} x\,dx\,dz$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} 2x(1-x)dx = 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$