

## 小中高の数学教育について言い残したいこと

はじめに「要項」の原稿をコピーする。

これまでさまざまなテーマについてたくさんの論稿を書いてきた。最近の5,6年で50編ほど。東数協・月例研や白楽サークル（何森仁さん主宰）での報告が多いが、新しい進展があり、その価値には自信がある。公表されることなく、このまま世に知られぬままに消えてしまうのは残念なので、ウェブ上での公開を急いでいるが、今回のサロンでもその一端を伝えたい。数学を学ぶことは自らの中に数学を構築することであり、その一つの実例として聴いて頂きたい。コンピュータでのデモを多用する（GeoGebraを中心に）。“動きの中で見る”ことが数学ではとりわけ重要である。

次のような題材群の中から選んで話す。

- 1 複比例関数としての掛算，“量の分数”（比例の作用）を矢線で示す。二つの割り算（矢線を作る，矢線に沿う後退）。
- 2 物質質量，分率と濃度。現代の物理や化学との関連。
- 3 内包/外延対の数学。温度・質量の対とそれに作用する熱量など。射影幾何の概念
- 4 足し算での“点と矢線”の枠組み。二つの引き算。負の数の二つの役割。会計処理。
- 5 幾何の新しい捉え方。例：半直線の角と直線の角。astroid や cardioid の探索。
- 6 Geometric Algebra（幾何代数），新しい数学・物理の枠組  
（要項のコピー貼り付けの終わり）

### 文献表

（まだ十分に整理されていない。上記の題材群に限っても、これ以外に、バージョンの違いも含めて、むやみにたくさんのファイルがある。）

- [1] 比率の和，“比率と総数の対”の和，22015/12/26 白楽サークル
- [2] 比例の作用としての分数，2016/01/30, 02/27 白楽サークル
- [3] 時間と速度と距離（まとめ，蒸し返し），2016/03/20 白楽サークル
- [4] 時間・速度・距離の計算，その図示，2016/04/23 白楽サークル
- [5] 速度，量分数，時間-速度対，2012/07/14 白楽サークル
- [6] 半直線の角と直線の角，2014/04/19 白楽サークル
- [7] 温度体と熱量の数学，2011/12/25
- [8] 直線間の角一定の交点の軌跡，2011/12/31
- [9] 掛け算の順序について I --- 離散量から始める --- 2013年6月28日（30ページ，IIもある）
- [10] 小さい数の認知について，2011/12/26
- [11] 点と矢線の加法・減法，2011/12/25

- [12] 正負の数の加減, 2015/08/11, @数教協・全国中学校研究集会@明星学園 (現実には, 「レポート発表」は実現できなかった。日付の 08/11 は誤記?)
- [13] 会計処理に現れる正負の数, 2015/10/31, 11/28大修正, 白楽サークル
- [14] 物質質量, 分率と濃度, 2014/11/29, 白楽サークル,  
混合物の分率と濃度について, 2014/12/13, 東数協月例研・中高部会  
(22ページ, 何故か, 単一のファイルの中に二つの論稿が)
- [15] 「文様の幾何」の一例, 2016/05/28, 白楽サークル
- [16] 円周に接して転がる円周の上の固定点の軌跡 — hypocycloid と epicycloid —,  
2016/06/25 (07/09 に補足を追加, 07/23 修正), 白楽サークル
- [17] 音程と音律の数学, 2012/11/24 (「作成途中版」と書いてあるが, これ以後の版は見つからない。かなり整っている。)
- [18] 線型代数を幾何代数に拡張する -- D. Hestenes に代表される数学/物理の潮流を取り込む --  
2015/11/29, 数理科学・数理教育研究会@亜細亜大学
- [19] 二つの線対称の合成による回転, 2015年12月12日, 東数協・月例研@日大文理 (桜上水)

## 題材群 (候補) と文献表の関係

1 (要項にあげた題材群の 1) [3] と [4] (この二つはコピーを配布する。図と式と図式を表形式にまとめたもので, 文章がほとんどない)。[2] はこれを補う資料の一つ。少し前のものだが, [5] は基本的, 私としては完成度の高い作品の一つ。[5] では図示の手段として伸縮自在な”可変物差し”をコンピュータ上に実現して活用している。”可変物差し”はこの文献表に挙げていない数多くの論稿で活用している。

2 [14] がその資料。濃度や分率の「数学教育」での扱いは, あまりにも問題があり過ぎる。[14] では, ”物質質量” から出発し, 現代の国際的な化学や物理の水準に合わせようと試みた。私自身は力不足なのだが。

3 “内包/外延対の数学”というのは, 過去のAMI サロン (数楽サロン?) で報告した

小島 順: 内包/外延対の数学 (2009年8月6日, 数教協・松江大会)

から始まっている。[7] の “温度体と熱量の数学” は簡潔にその要点をまとめている。ここで温度体とは温度と質量の対であり, それに熱量が作用する。この数学的枠組みは極めて広い範囲に適用できる。また [1] は ([2] と重なる 分数そのものの 議論の他に) 離散的なケースについて, “比率と総数の対”の代数を扱っている。

4 点と矢線 (ベクトル) は幾何学の基本的枠組みである。[12] “正負の数の加減” は「量の加減」に (本来は異質な) 幾何の概念を流用している (人間の偉大な才能)。今回は 1 の量の乗除との対比に目を向けたい。加減の矢線は”変位”という数学的対象そのものであるが, 乗除で多出する矢線は単なる記号である。しかし, 乗除という作用まで, 空間的な”変位”と置き換えて知覚する人間の「対数感覚」が背後にある。2点の差としての矢線を求める引き算は2量の比として量分数を求める割り算に対応し, 1点からの矢線 (変位) による後退を示す引き算は1量から矢線 (量分数の作用) による後退 (分母と分子を交換して掛けること) を示す割り算に対応する。[11] は

[12] に先行する簡潔なレポート。なお、[12] では加減の表現法としてコンピュータ上の ”二本の物差し” を使っている。より簡便な方法として (数学的対象としての) 矢線を (目で見る) 矢線で描く方法を併用した (それが日常の姿である)。

正負の数は乗法の世界では、正の実数を ”1より大, 1より小” と分けることに対応する。学校教育では順序が逆転していて、子供は長い期間、正負の数の加減の世界から隔離されている。

[13] は ”会計処理に現れる正負の数” を扱っている。出発点は一つの量のなかで、その増減を正負で表現することである。第2の正負の用法は異質な二つの量の対比のためのものである。負債 (借金) はキャッシュの観点 (キャッシュフロー) からは正の量であり、純資産の観点 (損益計算表) からは負の量である。一つの量の増減という明解な基本から教育は出発すべきであり、 「資金調達を負の量」と決めてかかるような、異種の量に関わる (疑問のある) 出発をすべきではない。

5 [6], [8], [15], [16] が該当する。今回は GeoGebra 5.0 というフリーウェアのソフトを活用し、 ”動的な幾何” を見てもらう。新しい発見があり、新しい視点の獲得がある。

6 幾何代数 [18] が主な資料 (といっても、私が書いたものとしては、に過ぎない)。いわゆる ”ベクトル解析” に代わる物理・数学の新しい統一言語として提起されている ”幾何代数”, ”幾何解析” を検討する価値がある。たくさんの教科書がすでにある。今日扱うには大きすぎる題材。

## 今日の主要な題材

丁寧に扱える事項はごく僅かに限られる。今回は 1 に時間を配分し、掲げたキーワードを説明する。原理は極めて単純である。 ”量分数” は分母の量を分子の量に移す (運ぶ) ことで定まる比例の作用 (矢線) であり、この形式は意味が明白、したがって機械的・自動的計算が容易である。

「量分数で割ることは、分母と分子を交換して掛けること」は初めから明白である。もう一つの割り算は量分数を (比として) 作るもので、二つの割り算の対比はすでに 4 の所で触れた。

私の言う ”量分数” の概念は世の中では当たり前のもので流通しているが 「数学教育」 のなかでは存在しないように思われる。

他の題材は概略を述べるか、パスするか、のいずれかとなる。

ただし、5 の ”動的幾何” の話題は、気分を変える意味もあって、途中で GeoGebra を使った実演を挿入する。

どれだけ要領よくファイルの取り換えができるか、など準備が大変で、大会初日、ある人に 「掲げた題材の 1/10 も処理できそうにない」と話したところ、1/10 でなく 1/100 に留めるようにと、真顔で忠告された。うまく行くといいのですが。