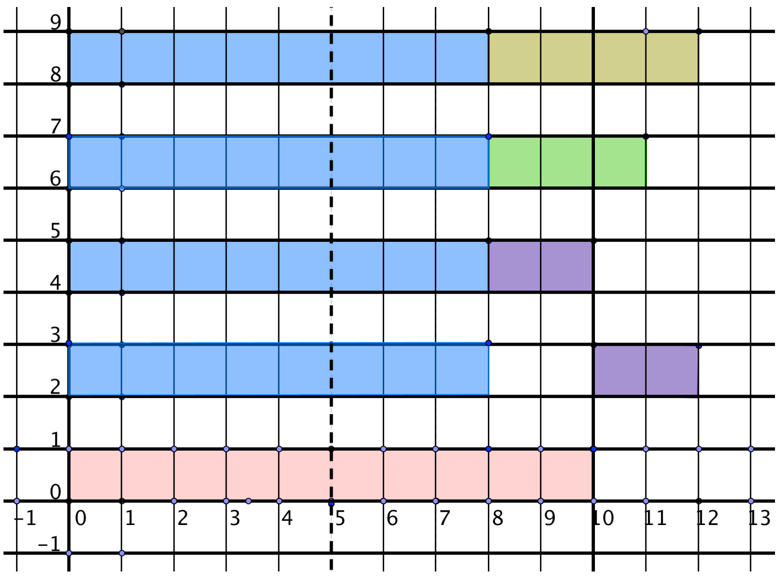
2011年12月26日　　小島 順
（2018年2月17日に部分的修正）

小さい数の認知について

本当に小さい数とは 2 と 3 あるいは 4 くらいまでだが，ここではそれに準ずる 10 までの数，それらを合わせてできる 20 までの数を範囲とする。

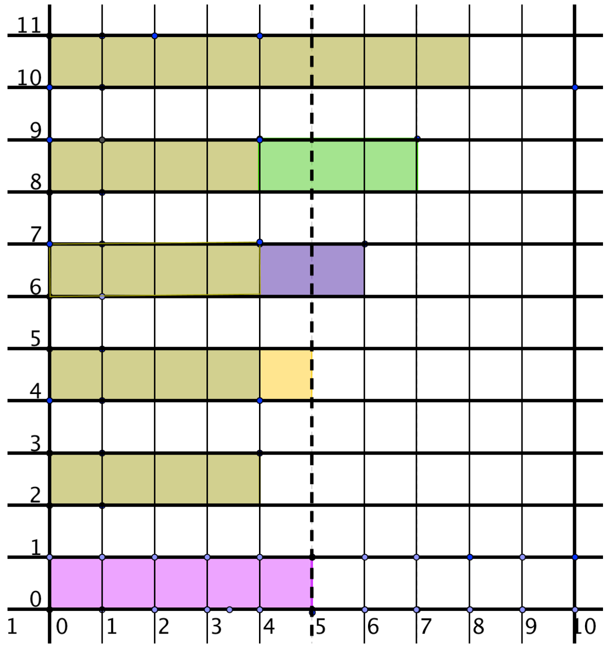
例として $8+3=11$ という”計算”を考えよう。この本質は計算と呼ぶようなものでなく，事実の把握，事実の認知（recognition）である。

「10でまとめる」という数システムを我々は前提としているのだから，まず10を単位に数を測る計数器（カウンター）が必要である。下の図では広いワークシートがあり，それは10のカウンターで敷き詰められている。図は，マウスの操作でシート上をタイルが実際に動く装置を GeoGebra によって作った，そのコピーである。



まず見本としての10 が置かれている。次に 10 のカウンターに 8 を入れると 2つ分の余白がある。これは 8 についての “事実”である。3 の前に 2 を入れてみると，10 ができる。数の和とはそれを”合わせること，連結すること”である。3 を 8 に連結すると，3 は（10 の枠の線で） 2 と 1 に分かれて，10 ができ，1 が外に残る。結果は 11 である。4 を加えるときは，4 は 2 と 2 に分かれて，合わせた結果は 12 となる。

人間は視覚的能力に優れていて，これらのことは見ただけで（一瞬で）認知できる。習熟すれば頭の中のイメージも操作できる。「$8+3=11$ だけを考える」というのは不自然なことであり，当然 $8+2=10$ の認知が先行する（少なくとも同時に起こる）。また $8+4=12$ のような隣接するケースも一緒に扱うことで，理解は深まる。



破線で区切った“5 のカウンター（計数器）”も使う。数とカウンターの二重性（測られるものと測るものとの二重性）のなかで数は認知される。 ここでは 4 に1 から 4 まで数を加えてみる。近隣の数を一緒に扱うことが重要である。

「4 足す 3 はなぜ 7 か？」などと問うてはならない。これは計算や議論の対象ではなく，事実についての認知，識別，把握の対象である。7 とは” 3 と 4 を合わせたもの”としてもともと存在している。

5 のカウンターをつないで 10 のカウンターができるが，横につないだ”長い 10 のカウンター”の他に二段に重ねた”短い 10 のカウンター”も重要である。

“短い 10 のカウンター”を使って冒頭の数の動きを再現する

ここでは基本的に数はペア（ a pair)として現れる。

$$10 = 5 \times 2,\ 4 = 2 \times 2,\ 6 = 3 \times 2,\ 8 = 4 \times 2 = 2^3$$

などである。5 が 2つ で10（ゴニジュウ），4 が 2つ で 8（シニガハチ）など。足し算も掛け算も”合わせる”という本質は同じである。「3 と 3」すなわち「3 が 2つ」，「4 と4」すなわち「4 が２つ」は「5 と 5」すなわち「5 が 2つ」と同列に並ぶペアである。「5 が 2つ」だけが特別の地位を持つわけではない。（おかしなことに，”5-2進法”論者は5以外の 2，3，4，6 などのペアを異端視する！）

”ペア”は人間の認識のなかで最も根源的なものである。ペアは「同じものが２つある」ことで，偶数とはこのように対（つい，ペア）となる数である（フランス語では今も偶数のことは pair である）。

3 は奇数だが，これは欠けた数（odd, impair)である。3 は 4 の正方形から 1つ が欠けている。（ 視覚的，空間認知的能力と並び，人間は時間的，運動的，言語的（あるいは音楽的）な能力にも秀でているが，数詞を唱えるとき， 3 については （普通の日本人は？）4 ビートの一小節のなかで最後が休止符となっている。）次の奇数は

$$5 = 3 + 2 = 4 + 1 = 6 - 1,\ \ 7 = 4 + 3 = 6 + 1 = 8 - 1$$

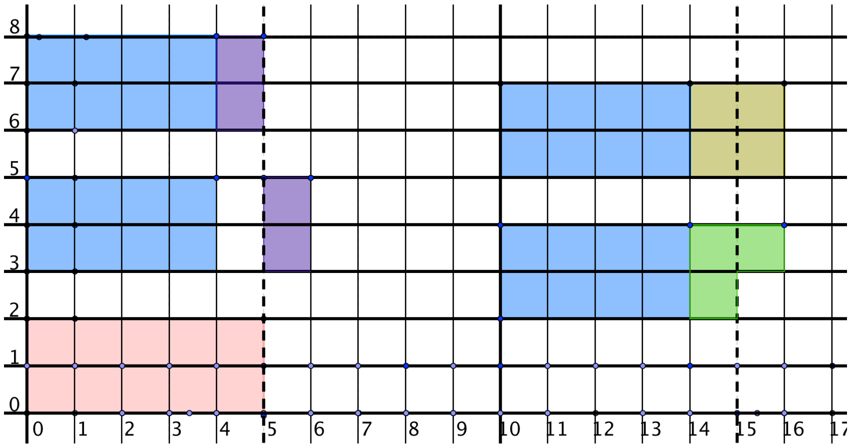
である。二つの偶数（ペアの数）に挟まれる”欠けた数”である。

“短い 10 のカウンター（計数器）” による2数の和の考察を続ける（次ページに図）。

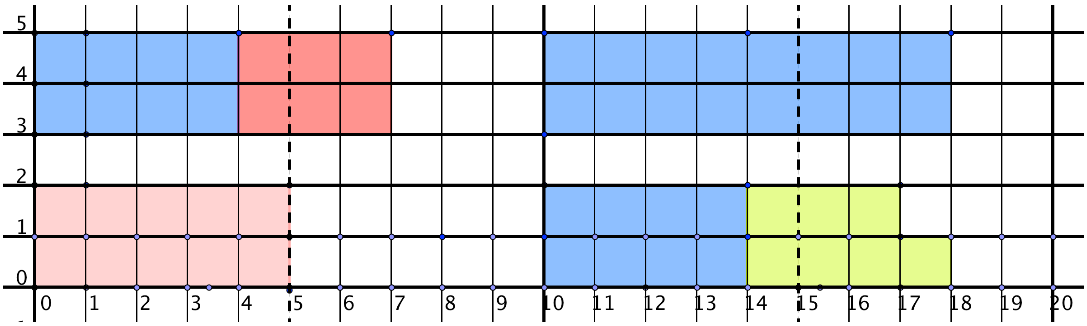
8 + 4 は $(4 + 2) \times 2 = 6 \times 2 = 12 = 2^2 \times 3$ であり，空間的には 横に長い 6 が 2行 とも，次ページの二つ目の図の左上に見る 2行 3列 の（赤い） 6 が横に 2つ とも，正方形の 4 が横に 3 つ とも認知される。1ダース（＝12）は「6のペア」と把握される数である。

（“10 の計数器”にこだわらなければ，赤い 6 を 2段 に 重ねた 4行 3列 の長方形配列とすることもできる。さらにタイルをキューブに取り替えるならば，2行3列2段の直方体，2行2列3段の直方

体で表現される。それより前に，$8=2^3$ が 2行2列2段の立方体で表現される。この稿では3次元の作図を用意しなかった。）

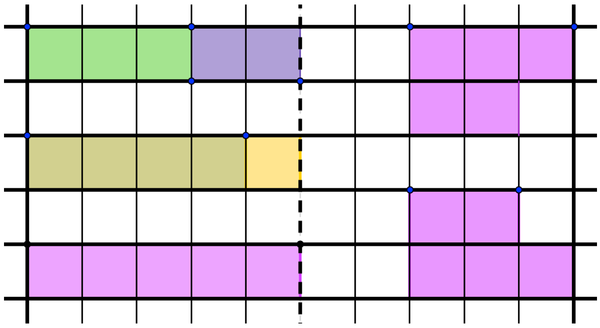


さらに続けて，$8+6, 8+7, 8+8$ を実現する。$8+6=(4+3)\times 2=7\times 2=14$ である。$8+8=8\times 2=16=4\times 4$ は 2行 4列 の長方形配列の 8 が横に 2つ とも，横に長い 8 が 2行 とも, 4 が横に 4つとも見ることができる。 4ページ の図のように 4行 4列 の正方形配列にもできる。ここでは “20 のカウンター”のなかの 4 の余白も目に入る：$8+8=20-4=16$ である。

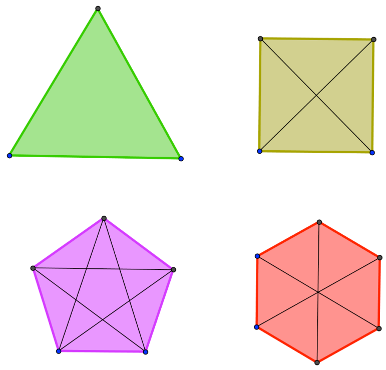


本当に小さい数たち（記述の重複がある）

数の認知の基本にあるのは 2 と 3 である。この 2 つの数は世界のどの種族（ethnic group)ももっている。”新生児にとっての 2 “ は母親の 2 つの目である。 2 と 3 からより大きな数は構成されていく。すでに述べたように，2 のペアが 4：$4=2+2=2\times 2$ 。3 のペアが 6：$6=3+3=3\times 2$ である。これらは正方形，長方形の”配列の形”として認知される。



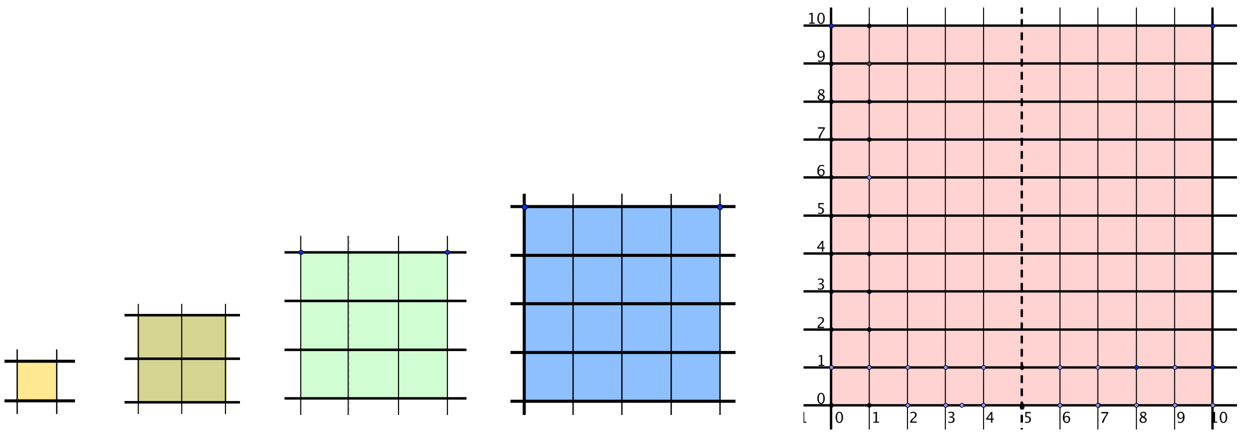
$5 = 4 + 1 = 5 - 1 = 3 + 2$ は”欠けた数”だが我々の文化にとって重要である。4 指 (fingers) に親指 (thumb) を補ったのが片手の指の 5 である。電車の座席に見るように，5 はそのままよりは $2 + 3$ と分解することで，より容易に認知できる。



2, 3, 4, 5, 6 のような小さな数は、様々な”形”としても識別される。一例として正多角形の頂点と辺その他を示した。この例では，数は集めるというよりは，分割により発生している。

また人間は小さな子でも，”リズム”としてこれらの数を認知し，叩き，歌い，踊ることができる。

$1, 4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, 100 = 10^2$ のような平方数の系列もある。9 から先きは”(短い) 10 の計数器”という枠を超えた配置となっている。10までの数は10色に描き分けたが（1黄， 2紫，3 緑，4黄土色，5赤紫，6赤、7黄緑，8青，9薄緑，10ピンク），その先きは既出の色を流用している。



「一つづつ増えていくもの」という”序数的”な数の捉え方は、それだけでは一面的に過ぎる。初めに数があり，数の間の演算がその後で発生するのでなく， 2 と3 から出発して，
$2 \times 2 = 4, 3 \times 2 = 6. 4 \times 2 = 8$ のように掛け算で（ペアとして）構成されたり，
$3 + 2 = 5, 4 + 3 = 7$ のように足し算で構成されたりで，（認知的には）数は演算によって広がっていくのである。そして　$9 = 3^2, 100 = 10^2$ のような平方数，
$8 = 2^3, 1000 = 10^3, 1{,}000{,}000 = 100^3$ のような立方数の構成の方向もある。

「数教協」に前からあった「アクティブラーニング」

足し算とは”合わせること”で，それはモノのレベルで合わせること、すなわち，”近づけ連結すること”と対応している。一部にそれと反対方向の「切り離す」指導がある。”8＋3” について「両方に 5 を作る 5-2 進法」による授業の一つでは，”5 人のリレーによるアルゴリズムゲーム” で実行され，

(1) 8 を 5 と 3 に分ける；
(2) 3 と 2 で 5 になることに気付く；
(3) 一方の 3 を 2 と 1 に分ける；
(4) 2 と 3 を足して 5 とする；
(5) 5 と 5 を足して 10 とする；
(6) 10 と 1 を足して 11 とする

のようなステップに分解される。数学の学びの”儀式化”，”空洞化” が進行する。「タイルをくっつけて置く子がいたら、離すように指 導する」そうである。これは「模範的な」アクティブラーニングの先取りであった。

バラバラに切り離すと，要素の数が増えて、脳の作業領域への負荷が大きくなる。紙の上ならともかく，頭の中にイメージを作ることが困難となる（作業のための短期一時的な記憶領域の容量が大変小さいことはよく知られている）。”暗算ではむずかしい”ことは，この「切り離し」方法の短所である。　「5人のリレーでこういう結果が得られた」よりは「見えている明白な事実」のほうが認知の質が高い。

小島 順：「繰り上がりの足し算について」（『数学教室』こ・そ・あ・ど　投稿　08/10/20 ）で，この問題を論じた。また
小島 順：「小さい数と付き合う」（2009年3月14日）
という未公刊の論考がある。