小島 順　2010 年 8 月 5 日

言語と数学のなかの記号論理
— 述語論理を中心に —

1　はじめに

「6 の倍数は 3 の倍数」のような条件文を「命題論理」の中で ($p \Rightarrow q$ の形で) 処理することはできない。この枠組みは数学にとって役に立たず，実際に使われているのは述語論理である。例えば
「3 の倍数であることは 6 の倍数であるために必要だが十分ではない」
は次の二行の論理式で表現される（それぞれ同値な二つの形を挙げた）。

$$\begin{array}{rcl} \forall n(3 \nmid n \to 6 \nmid n) & \equiv & \neg\exists n(3 \nmid n \,\&\, 6 \,|\, n) \\ \neg\forall n(3 \,|\, n \to 6 \,|\, n) & \equiv & \exists n(3 \,|\, n \,\&\, 6 \nmid n) \end{array}$$

このように，変数を含む述語と $\forall$(全称記号）と $\exists$(存在記号）が必須である。

日常言語では（それぞれ二つ目の式は）必要性は「3 の倍数でないのに 6 の倍数であるような自然数は存在しない」，不十分性は「3 の倍数でありながら 6 の倍数でないような自然数が存在する ($n = 3, 9, 15$ など)」という言い方になる。

論理を楽々とこなす能力が、生来的に人間に備わっているわけではない。だから掛け算に筆算の方式が，数学一般に数式が必須であるのと同様の理由で，論理式の運用が論理の処理には不可欠である。

解析学で一つのカギとなる一様性の概念は, いわゆるエプシロン-デルタ論法で記述されるのだが，今日では述語論理の普及で，万人に容易に近づけるものとなった。一様連続とその否定を並べると

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x\ \forall y\ (|x-y| \le \delta \to |f(x)-f(y)| \le \varepsilon)$$
$$\exists \varepsilon\ \forall \delta\ \exists x\ \exists y\ (|x-y| \le \delta\ \ \&\ \ |f(x)-f(y)| > \varepsilon)$$

日常言語における論理と数学の中の論理の対比
西欧語のなかで形成された論理式と日本語の関連
ルール・規範と論理の関連
などの論点にも注意を払う。
（ここまでは,「びわこ大会」の要項として準備したものを転載）

2　述語と命題

「n は 6 の倍数である」，あるいは「6 は n を割る」（記号で $6 \mid n$）は形の上では文章 (sentence) であるが，n は変数（自由変数）に過ぎず，いわば仮の主語としての代名詞である。「それは 6 の倍数である」，「6 はそれを割る」のように。したがって，これは何かの主張をしているのでなく，単に（それがもつべき）性質 (property）を記述している。真の意味での主語がないことから，これは述語（predicate) と呼ばれる。

n に例えば 3 を代入すると「3 は 6 の倍数である」という誤りの言明（statement) に変わり，12 を代入すると「12 は 6 の倍数である」という正しい言明に変わる。性質はまた条件とも呼ばれるが，おのおのの自然数 n ごとに，条件 $6 \mid n$ が満たされるかどうかが決まる。言明は命題（proposition) に対応する。

2.1　述語への作用

述語（あるいは性質）についての作用（operation) を考える。

まず, 一項演算としての否定 $\neg$ ある。$\neg 6 \mid n$ は
「It is not true that 6 divides n」，「6 doesn't divide n」
の意味であり，記号で $6 \nmid n$ と書く。

二項演算として and に当たる $\wedge$ と or に当たる $\vee$ が使われる。$\wedge$ の替わりに & を使うこともある。その例を挙げる。

$$6 \nmid n \vee 3 \mid n, \qquad 3 \mid n \vee 6 \nmid n \tag{1}$$
$$6 \mid n \vee 3 \nmid n, \qquad 3 \nmid n \vee 6 \mid n \tag{2}$$
$$6 \mid n \wedge 3 \nmid n, \qquad 3 \nmid n \wedge 6 \mid n \tag{3}$$
$$6 \nmid n \wedge 3 \mid n, \qquad 3 \mid n \wedge 6 \nmid n \tag{4}$$

第 1 行である (1) の二つは，それぞれ
「$6 \nmid n$ であるか，さもなくば（$6 \mid n$ のときは）$3 \mid n$ である」
「$3 \mid n$ であるか，さもなくば（$3 \nmid n$ のときは）$6 \nmid n$ である」
と考える。しかし，この二つの性質は等しい。結果として演算 $\vee$ は二項の順序に無関係な（対称的な）演算となる。それに対して二つの表現のどちらを用いてもよい。n が $6 \nmid n$ と $3 \mid n$ の双方を満たすときも，n は $6 \nmid n \vee 3 \mid n$ を満たすことになっている。

二項演算として，さらに conditional $\to$ がある[*1]。

$$6|n \to 3|n \equiv 6\nmid n \vee 3|n, \qquad 3\nmid n \to 6\nmid n \equiv 3|n \vee 6\nmid n, \tag{5}$$
$$6\nmid n \to 3\nmid n \equiv 6|n \vee 3\nmid n, \qquad 3|n \to 6|n \equiv 3\nmid n) \vee 6|n \tag{6}$$

それらの否定については

$$\neg(6|n \to 3|n) \equiv 6|n \wedge 3\nmid n, \qquad \neg(3\nmid n \to 6\nmid n) \equiv 3\nmid n \wedge 6|n, \tag{7}$$
$$\neg(6\nmid n \to 3\nmid n) \equiv 6\nmid n \wedge 3|n, \qquad \neg(3|n \to 6|n) \equiv 3|n \wedge 6\nmid n \tag{8}$$

2.2 数量詞

ここで、二つの数量詞（量称記号，quantifier）$\forall$ と $\exists$ を導入する。

$$\forall n(6|n \to 3|n), \qquad \forall n(3\nmid n \to 6\nmid n) \tag{9}$$
$$\forall n(6\nmid n \to 3\nmid n), \qquad \forall n(3|n \to 6|n) \tag{10}$$
$$\exists n(6\nmid n \wedge 3|n), \qquad \exists n(3|n \wedge 6\nmid n) \tag{11}$$

これらはすべて（自然数 n についての性質・条件ではなくて，そして述語ではなくて）言明であり命題である。

(9) の二命題は互いに対偶で同値、正しい命題である。(10) の二命題も互いに対偶で同値，(10) は命題群 (9) に対して裏・逆と位置づけられる。こちらは正しくない。(11) の二命題はそれら (10) の否定であり，こちらが正しい。(9) と (11) だけが正しいことに注意を！

2.3 十分と必要

(9) の第１式（論理式）は，ていねいに読むと，たとえば
「どの自然数 n をとっても，もし $6|n$ ならば $3|n$ である」
となる。より省略的な「$6|n$ ならば $3|n$」という言い方は (5) の第１式の述語を指すこともあるが，(9) の第１式の命題を指している場合が多い。これは正しい命題である。それを踏まえて，
「$3|n$ のために $6|n$ ならば十分」という読み方をする。

対偶に当たる (9) の第２式の方は
「どの自然数 n をとっても，$3|n$ でなければ $6|n$ でない」

[*1] 下の (5) の左側の $6\nmid n \vee 3|n$ は「$6\nmid n$ であるか，そうでなくて $6|n$ ならば $3|n$」という意味であったが，それを省略して「$6|$ ならば $3|n$」という後半だけを書いたのが $6|n \to 3|n$ である。あるいは逆に $6|n \to 3|n$ において考察対象が すべての自然数 であることを意識し，すべてを明示的に書くと $6\nmid n \vee 3|n$ となる。

という意味なのだから，日常語では
「$6 | n$ であるためには $3 | n$ でなければならない（3 must divide n)」となる。そしてこの命題は正しい。それを踏まえて，
「$6 | n$ であるためには $3 | n$ であることが必要」という言い方（読み方）をする。

(10) の第 1 式がもし正しいならば，「$6 | n$ は $3 | n$ のために必要」となるところだが，その否定である (11) の第 1 式の方が正しい（$n = 3, 9, 15$ などがある)。すなわち (10) の第 1 式は正しくない。したがって，
「$6 | n$ は $3 | n$ のために（十分ではあるが）必要ではない」

(10) の第 2 式がもし正しいならば，「$3 | n$ は $6 | n$ のために必要」となるところだが，その否定である (11) の第 2 式の方が正しくて (10) の第 2 式は正しくない。したがって，
「$3 | n$ は $6 | n$ のために（必要ではあるが）十分ではない」

なお，全称記号 $\forall$ でなく存在記号 $\exists$ を使って (9) に同値な論理式を作ると

$$\neg\exists n(6 | n \wedge 3 \nmid n), \qquad \neg\exists n(3 \nmid n \wedge 6 | n) \tag{12}$$

となる ($\forall \equiv \neg\exists\neg$ を使って機械的に処理できる)。それぞれが
「6 の倍数で 3 の倍数でないような数は存在しない」
「3 の倍数でなくて 6 の倍数であるような数は存在しない」
と読めて，これが (9) と同値であることは感覚的にも掴めるだろう。

2.4　ふるいによる仕分け

自然数についての性質 $6 | n, 3 | n$ などを考えよう。$6 | n$ は変数 n を含む一つの表現（式）であるが，それは自然数についての性質「n は 6 で割り切れる」を記述している。個々の自然数ごとにこの性質を持つかどうかが決まっている。自然数の全体はその性質をもつものと持たないものに仕分けされる（6 の倍数と 6 の倍数でない数に仕分けされる)。性質は仕分けの機能として把握される。この仕分けにとって性質はその基準（criterion) あるいは条件 (condition）である。ある場合には，それは要求 (requirement) とも呼ばれる。

$6 | n$ の変数 n は自然数を挿入するスロットである。機能（すなわち，関数）としての $6 | n$ の出力は真 (True) か偽 (False) かという判定であり，$6 | 9 =$ 偽 , $6 | 12 =$ 真 のようになる。方程式　$6 | n =$ 真 の解は 6 の倍数の全体である。

仕分け（sorting, screening) の機構としての $6 | n$ は「6 のふるい（篩)」である。6 の倍数だけを通し，それ以外を止めることで自然数を仕分ける。

$6 | n \to 3 | n$ という条件（述語）を仕分けのシステムとして理解するために

$$6 | n \wedge 3 \nmid n \tag{13}$$

という性質を検討しよう。

これは「６のふるいを通り抜けるが次に３のふるいで止められる」,「６の倍数でありながら，３の倍数ではない」という性質である。この性質をもつ自然数は存在しない。

性質（13) の否定は「６の倍数でないか，さもなくば（６の倍数ならば）３の倍数である」となる。

$$\neg(6\,|\,n \wedge 3\nmid n) \quad \equiv \quad 6\nmid n \vee 3\,|\,n \tag{14}$$

である。すべての自然数がこの性質 (14) をもつ。こうして，次の二つの命題は（同値でともに）真である。

$$\neg(\exists n)(6\,|\,n \wedge 3\nmid n) \tag{15}$$

$$\equiv \quad (\forall n)(6\nmid n \vee 3\,|\,n) \tag{16}$$

仕分けのシステムとしての $6\,|\,n \rightarrow 3\,|\,n$ を表の形に，つぎに「ふるいを通過する」様子の図示として示す。

	$6 \mid n$	$6 \nmid n$
$3 \mid n$	○ 6,12,18	○ 3,9,15
$3 \nmid n$	× （空白）	○ 1,2,4,5,7

表１: $6 \mid n \rightarrow 3 \mid n$ による仕分け表

	$6\,\vert\, n$		$3\,\vert\, n$	
1, 2, 4, 5; 3, 9, 15	$\vert$	（空白）	$\vert$	6, 12, 18
	$\longrightarrow$		$\longrightarrow$	

図１：条件 $6\,|\,n \rightarrow 3\,|\,n$ による仕分け

表１の ○ をつけた欄に落ちる数は条件 $6\,|\,n \rightarrow 3\,|\,n$ を合格し，× をつけた欄に落ちる数は不合格である。実際には不合格の欄に落ちる数が一つもなくて，(14) の（同値な）二命題が真となるのである。

図１も同じことを表現している。仕分けは二段に分かれている。ふるい $6\,|\,n$ をパスする数はそのままふるい $3\,|\,n$ をパスする。二つのふるいの間に留まる数は一つもない。予備検査としてのふるい $6\,|\,n$ をパスしない数は，そのことによって全体としての仕分け $6\,|\,n \rightarrow 3\,|\,n$ をパスするのである。

「６の倍数ならば３の倍数」は,「自然数は，もし６の倍数ならば，それは３の倍数である」という自然数全体を主題とする叙述なのである。「n が６の倍数であるのは $n = 6k$ と

書ける場合である」という，自然数の中で 6 の倍数を仕分ける意識がはじめにあり，つぎに $6k = 3(2k)$ と変形されるのである。

次の図 2 は対偶の条件 $3 \nmid n \ \rightarrow \ 6 \nmid n$ による仕分けの様子である。

	$6 \nmid n$		$3 \nmid n$	
1, 2, 4, 5	|	（空白）	|	6, 12, 18
	|		|	3, 9, 15
	$\longleftarrow$		$\longleftarrow$	

図 2：条件 $3 \nmid n \rightarrow 6 \nmid n$ における仕分け

数は右から左へ動く。ふるい $3 \nmid n$ をパスする数はそのままふるい $6 \nmid n$ を通過し，二つのふるいの間に留まる数は一つもない。表 1 の仕分け表はそのまま使える。横に見て，ふるい $3 \nmid n$ をパスしない数と（パスする数についての仕分けで）$6 \nmid n$ をパスする数とに分かれている。

次の図 3 は逆とその対偶（原条件の裏）による仕分けの状況を同時に表現している。

	$3 \mid n$ $\longrightarrow$		$6 \mid n$ $\longrightarrow$	
1,2,4,5	|	3,9,15	|	6,12,18
	$\longleftarrow$ $3 \nmid n$		$\longleftarrow$ $6 \nmid n$	

図 3：$3 \mid n \rightarrow 6 \mid n$ と $6 \nmid n \rightarrow 3 \nmid n$

条件 $3 \mid n \ \rightarrow \ 6 \mid n$ については左から右へと数を動かし，条件 $6 \nmid n \ \rightarrow 3 \nmid n$ については数を右から左へ動かす。ふるいの機能は切り替えられている。仕分けについての表 1 はこの二つの場合にも使用できる。

逆命題について，その <u>否定</u> の形の一群は

$$
\begin{aligned}
& (\exists n)(3 \mid n \ \wedge \ 6 \nmid n) && (17)\\
\equiv \quad & \neg(\forall n)(3 \nmid n \ \vee \ 6 \mid n) && (18)\\
\equiv \quad & \neg(\forall n)(3 \mid n \rightarrow 6 \mid n) && (19)
\end{aligned}
$$

となり，こちらが真である。

裏（逆の対偶）について，その <u>否定</u> の一群は

$$
\begin{aligned}
& (\exists n)(6 \nmid n \ \wedge \ 3 \mid n) && (20)\\
\equiv \quad & \neg(\forall n)(6 \mid n \ \vee \ 3 \nmid n) && (21)\\
\equiv \quad & \neg(\forall n)(6 \nmid n \rightarrow 3 \nmid n) && (22)
\end{aligned}
$$

となり，こちらが真である。

図 3 で二つのふるいの間が空でなく，$3, 9, 15$ のような数がそこに留まっていることと，逆命題，裏命題が偽であることとが対応している。表 1 では右上の欄が空でないことが対応している。

2.5 $x^2 = 4$ などをめぐって

実数を表す変数を x として，「もし $x = 2$ ならば，そのときは $x^2 = 4$」という表現は一つの条件である。この条件は，「$x \neq 2$ か，あるいは $x^2 = 4$ か」という条件と同等である。そしてこの条件はいつも満たされるから命題

$$\forall x(x = 2 \ \rightarrow \ x^2 = 4) \quad \equiv \quad \forall x(x \neq 2 \vee x^2 = 4) \tag{1}$$

は正しい。

この (1) の対偶

$$\forall (x^2 \neq 4 \ \rightarrow \ x \neq 2) \quad \equiv \quad \forall x(x^2 = 4 \vee x \neq 2) \tag{2}$$

は (1) と同値で，当然正しい命題である。

一方，(1) の <u>逆命題</u>

$$\forall x(x^2 = 4 \ \rightarrow \ x = 2) \quad \equiv \quad \forall x(x^2 \neq 4 \vee x = 2) \tag{3}$$

は正しくないが，それは，その否定である

$$\neg \forall x(x^2 = 4 \ \rightarrow \ x = 2) \quad \equiv \quad \exists x(x^2 = 4 \wedge x \neq 2) \tag{4}$$

が正しいということである（$x = -2$ の存在)。

(3) と同値なその対偶（(1) の裏命題）

$$\forall x(x \neq 2 \rightarrow x^2 \neq 4) \quad \equiv \quad \forall x(x = 2 \vee x^2 \neq 4) \tag{5}$$

は当然正しくなく，その否定である

$$\neg \forall x(x \neq 2 \ \rightarrow \ x^2 \neq 4) \quad \equiv \quad \exists x(x = 2 \wedge x^2 = 4) \tag{6}$$

が正しい。

(1) が正しいので，
$x^2 = 4$ であるために，$x = 2$ であれば十分である。

(2) が正しいので，
$x = 2$ であるためには $x^2 = 4$ であることが必要である。

(3) が正しくないので，
「$x = 2$ であるために $x^2 = 4$ であれば十分」ではない。
(5) が正しくないので，
「$x^2 = 4$ であるために $x = 2$ であることが必要」ではない。

2.6 条件の多い・少ない

2.3 によれば，$6|n$ は $3|n$ であるために十分だが（必ずしも）必要ではない。条件としては過剰なのである。

$3|n$ は $6|n$ であるために必要だが（必ずしも）十分ではない。条件としては不足なのである。

もともと

$$6|n \quad \equiv \quad 3|n \wedge 2|n \tag{7}$$

であった。ふるい $3|n$ にふるい $2|n$ を重ねてふるい $6|n$ は作られている。

条件が条項 (items）から構成されるとすれば，$6|n$ は二つの条項 $3|n$ と $2|n$ よりなる。

「条件が十分」は多いに，「条件が必要」は少ない，に対応する。

ふるいとして，「条件が十分」は細かいに，「条件が必要」は粗いに対応する。

条件 $6|n$ ($3|n$ に対して）	十分	過剰	不必要	多い	強い	細かい	含む
条件 $3|n$ ($6|n$ に対して）	必要	不足	不十分	少ない	弱い	粗い	含まれる

表 2：条件の比較

“含む” は “意味する” とも言うが，“$6|n$ implies $3|n$” という言い方は, 条件 $6|n \rightarrow 3|n$ を指すこともあれば，“**2.2** の (9) の命題が正しい” を指すこともある，ように思われる。ここでは後者の意味の “含む” である。

条件と（条件をみたす）集合については，これらの形容が逆転することに注意しよう。条件 $6|n$ は条件 $3|n$ を含むけれども，6 の倍数の全体は 3 の倍数の全体に含まれる。6 の倍数よりも 3 の倍数の方が多い。

条件（内包）と集合（外延）の duality をバランスよく統合的に捉えることが要求される。

	6 の倍数	3 の倍数
条件	含む 多い	含まれる 少ない
集合	含まれる 少ない	含む 多い

表 3：条件（内包）と集合 (外延）の対比

もう一つの例では

$$x^2 = 4 \quad \equiv \quad |x| = 2, \qquad\qquad x = 2 \quad \equiv \quad (|x| = 2) \wedge (x > 0) \tag{8}$$

をもとに同様の議論ができる。

3　命題論理

3.1　命題論理における十分性，必要性

運転免許がとれる条件は年齢 18 歳以上である。人 x が運転免許証を所持していれば，x が 18 歳以上と判断するに十分な根拠となる。前者の条件を Lx と書き後者の条件を Ax と書くとき，上のことは

$$\forall x(Lx \ \rightarrow \ Ax) \tag{1}$$

が正しい，と表現される。

そうでなくて，変数や述語のような内部構造にふれない，文章としての命題を最少単位とする議論にのせることができるだろうか？具体的には $\forall$ と $\exists$ がない命題論理の枠組みである。

ここでは「私は 18 歳以上」を命題 A とし，「私は運転免許をもっている」を命題 L としよう 。ただし “私” は他のなにかに置き換えても議論の内容は全く変わらない。その意味では主語はないに等しい。

二つの互いに同値な命題

$$L \ \rightarrow \ A \quad \equiv \quad \neg A \ \rightarrow \ \neg L \tag{2}$$

は恒に真（恒真）であるから正しい（valid)。A のために L は十分であり，L のために A は必要である。私はもし免許証を保持していれば（実際はもっていないが），成人指定の催しの入場の際の年齢チェックをパスできる。また，「私がもし 18 歳未満ならば免許証を所持しているはずがない」という推論は（実際の私が 18 歳以上であるに関わらず）正しい。

合わせて指摘しておくべきこととして，免許証所持という前提と 18 歳以上という結論の関係は，いわゆる原因・結果の因果関係ではない。あくまでも 論理的推論 の枠組の中の話である。「薬を飲まなければ風邪は治りませんよ」が本当に正しければ，「風邪が治ったならば，それは薬を飲んだことの証拠である」。

（２）の逆にあたる二つの同値な命題

$$\neg L \ \rightarrow \ \neg A \quad \equiv \quad A \ \rightarrow \ L \tag{3}$$

は正しくない（invalid である)。

つまり，それらの否定

$$\neg L \wedge A \quad \equiv \quad A \wedge \neg L \tag{4}$$

は恒偽ではなく, 真の場合がある（それは決して否定 (4) が正しい（恒真，valid）という意味ではない)。言い換えると，L は A のために必要ではなく，A は L のために十分ではない。私にとって「免許証を所持していなくても 18 歳以上であることを証明できる」ことがあり得るし，私にとって「18 歳以上であったとしても, 免許証を所持していない」ことがありうる。

述語論理における十分性，必要性の否定は $\forall$ からその否定 $\neg\forall \equiv \exists\neg$ への移行であったが, 命題論理での十分性, 必要性の否定は, 上に述べた意味での <u>正しい</u> の否定の <u>正しくない</u> の形をとる。

3.2 ルール，規範との関連

これらは <u>推論</u> における必要性，十分性の扱いであったが，そのような議論が成り立つ前提として社会における当該ルールの確立がある。

運転免許証を取得する条項としては,

1. 18 歳以上である。
2. 技能試験に合格している。
3. 免許申請のさまざまな手続きをする（金も払う)。
4. 学科試験に合格する,

などがあり,「18 歳以上」という条件はそれに一条項として含まれている。

運転免許証の発行が適正に行われ，その偽造なども一切ない，という前提のもとで，規範的ルールの上に論理的推論のルールが構成される。「免許証を所持していれば，18 歳以上であるために十分」とはこの状況での論理的推論を指している。

言語としての　must（ねばならない）が二重に，規範的にも推論的にも使われるという種類の状況は広汎で普遍的であるが，言語の進化の過程では，規範的用法が推論的用法に転用されたのであろう。

3.3 ルールを守っているか？

飲酒は 20 歳以上に限る

というルールが <u>守られているか</u> の議論にはやはり述語論理の枠組みの方が命題論理の枠組みよりは自然であり好都合である，ように思われる（こうして「命題論理」という節の中で

述語論理に戻ってしまう)。

一つのイベントに参加している集団内で，人を表す変数を x として，上記の条件（ルール）は

$$(x \text{ は飲酒}) \rightarrow (x \text{ は 20 歳以上}) \tag{1}$$

と表現される。このルールは守られていないことが多い。たとえば，大学新入生のクラスコンパなどでは守られていないだろう。

この条件は

$$(x \text{ は飲酒していない}) \vee (x \text{ は 20 歳以上}) \tag{2}$$

と同値で，(1) が守られているかどうかのチェックは，実際には条件 (2) にそって実行される。まず飲酒していない人と２０歳以上と分かっている人はそのまま OK である。飲酒していても 20 歳以上ならば OK であり，20 歳未満でも飲酒していなければ OK である（**2.4** の表１のような２次元の表を作ってみよう)。

条件 (2) の否定は

$$(x \text{ は飲酒している}) \wedge (x \text{ は２０歳未満}) \tag{3}$$

であり，この (3) を満たす x がルールを守らない人である。それは 20 歳未満で飲酒している人である。

調査係が参加者の一人一人についてカードを作成する。カードの表に飲酒の有無を書き，その裏に 20 歳以上かどうかを書くものとする。表が「飲酒しない」であれば，また裏が「20 歳以上」であれが，他の面を調べるまでもなく「ルールは守られている」と判定できる。

表が「飲酒する」，裏が「２０歳未満」のカードについては カードを反転して さらに調べなければ判定できない。そして表が「飲酒する」，裏が「２０歳未満」が見つかれば，それが違反者である。

もし全員がルールを守っていれば

$$\forall x((x \text{ は飲酒している}) \rightarrow (x \text{ は 20 歳以上})) \tag{4}$$

が真であり，一人でも守らない人がいれば

$$\exists x((x \text{ は飲酒している}) \wedge (x \text{ は 20 歳未満})) \tag{5}$$

が真となるのであった。

4　後ろに移した「まえがき」（の一部）

記号論理の話をする。数学が記号を使い，記号を並べた式（数式）を使うように，論理の分析・考察にも

記号 (symbol）を使い式（論理式，formula）を使う。それが記号論理である。

記号や式を使うことは，論理の扱いを易しくするためである。難しくするためではない（算数で掛け算の筆算の方式を学ぶことで，計算ができるようになることと共通)。

日常の自然言語の中の論理がまず対象となる。

論理を議論する際の言葉，つまり術語 (述語ではない！）を整理する必要もある。

文章（sentence）と言明（statement）の区別，言明と命題（proposition) の区別など[*2]。

数学の数式表現と同様に，記号論理も西欧語を基準としているので，我々がそれを学ぶには，日本語だけでなく英語の文章も対象とすることが理解の助けになる。

インターネット上の教科書

Gary Hardegree ”Symbolic Logic: A First Course (2nd edition)”
http://courses.umass.edu/phil110-gmh/text.htm
を今回私は読んでみた。

論理の分析の深さに応じて，命題論理（sentential logic）と述語論理（predicate logic) に分類される（proposition と sentence は違う，と言ったばかりなのに！)。

前者は statement を単位とし，and, or, “if ______ , then ______” , ”only if”, not などの連結詞でつながれる。

述語論理の方は sentence　の中に立ち入り，述語と名詞句に分解する。さらにそこでは数量詞（quantifier）が本質的である。日常言語の数量詞はたくさんあるが (each, every, all, any, some, at least one , no, not など)，論理式のなかでは，２個だけ ∀ と ∃ が使われる。命題論理と述語論理は並立しているのではない。　命題論理での議論はそのまま述語論理で通用する。後者は前者の拡大である。数学の論理は命題論理では処理できない。そして現在の述語論理の枠で数学が記述できることを我々は経験的に知っている。

三番目にアリストテレス（384-322 B.C.）から今日まで伝わる論理学（syllogistic logic）がある。　syllogistic では議論の前提（premise）の sentence が 2 個という制約があり，結論（conclusion) の sentence と合わせて 3 個の sentence という議論の特徴があるので三段論法と呼ばれたりする（言葉としては関係がない)。本稿では「議論」は扱っていない。

syllogistic では命題論理にある連結詞がなく（否定はある)，その一方で命題論理にない数量詞がある。

[*2] 文章の中でも疑問文や感嘆文は statement から除いている。それが正しいとか正しくないとかを 言える ものが statement。”雪が白い”, ”snow is white”など statement は日本語，英語のような言語のなかのものである。そこから取り出される言語をこえる proposition。しかし，私がこれらを使い分けているわけでもない