小島 順　2009 年 12 月 5 日

必要条件と十分条件について

1 「数学教室」2009 年 12 月号の記事

「数学教室」2009 年 12 月号に「必要条件と十分条件」という投稿があります（98 ページ)。書かれている内容は根本的・本質的におかしいと思います。

> ２つの条件 p,q において，
> 命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき，
> (ii)　　q は p であるための必要条件である。

という言明があり，　その [解釈] として，

> 命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき，p が仮定，q が結論になる。
> 結論 q として導くには，仮定 p が必要であるから，q は p であるための必要条件と考える。

と書かれている。

これは二重におかしい。

投稿者の太田博康さんは，その前のところで

> （命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき，）仮定 p から q が導かれるので，p は q であるための十分条件と考える。

と書いている。これは妥当であって，たしかに「仮定 p は結論 q のために十分」である。

同じ「$p \Rightarrow q$ が真」が，一度は「仮定 p は結論 q のために十分」とされ，今度は「仮定 p は結論 q のために必要」とされるのに，私はまず困惑する。(p がないと $p \Rightarrow q$ と書けないから p は必要？　これはダジャレのレベルである）

つぎに，もし本当に「仮定 p は結論 q のために必要」ならば,「p は q であるための必要条件」（実際はウソ）となるはずが，ここで何故か p と q を入れ替えて,「q は p のための必要条件」が導かれている。

このような口から出まかせの，誠実さに欠ける議論からは，どんな結論でも望むとおりに得られるだろう。

後の方で，「$p \Rightarrow q$ が真」を前提に，「文章の主語として結論 q を選ぶ」ときは（十分か必要かについては）「必要条件と判定」する。そして q が主語であるからには「q は・・・必要条件」と書く。このようなマニュアルが述べられる。p が q のために必要である（実際はウソだが）ことを無視して，「q は p のために・・・」と生徒に言わせる！

このような指導法で「理解度が深まると考えます」となっているが，このような，根拠が荒唐無稽であるがゆえに，押しつけにならざるを得ない「判定マニュアル」に生徒が習熟したとしても，「理解度が深まった」とは言えないだろう。

ここには，思考の深いレベルでの混乱がある。

2 日常言語を土台とする数学述語

必要条件や十分条件という数学述語は日常言語の用法をふまえ，それを土台としている。

太田さんが投稿の前半で使った例である

$$x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 4$$

などは変数 x を含んでいるから，本当は，$p \Rightarrow q$ の形よりも

$$(\forall x)(x = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 4) \tag{1}$$

のような表現が自然である。一般には

$$(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \quad \equiv \quad (\forall x)(\neg p(x) \vee q(x)) \tag{2}$$

である（同値な変形の一つを並べて書いた）。(2) の中の $p(x) \Rightarrow q(x)$ という表現は変数 x についての " 条件 " であり，それは条件 $\neg p(x) \vee q(x)$ と同値である．すべての x の一つ一つについてこの条件が検証されて，満たされていることが確認されたとき，命題 $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x))$ は真とされる。その検証の作業は，まず，$p(x)$ を満たすかどうかで x を仕分ける。$p(x)$ を満たさない x は関心外だから，そのままでよい。$p(x)$ を満たす x については，次の段階に進み，$q(x)$ を検証することになる[*1]。これが同値な条件 $\neg p(x) \vee q(x)$ の意味である。

命題 (2) の否定は

$$\neg(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \quad \equiv \quad (\exists x)(p(x) \wedge \neg q(x)) \tag{3}$$

[*1] あるいは，$q(x)$ を満たすかどうかで仕分ける。$q(x)$ を満たしていれば，それ以上言うことはない。$q(x)$ を満たしていない x については次の段階に進み，$\neg p(x)$ を検証することになる。

である。

今の例の <u>逆命題</u> $(\forall x)(x^2 = 4 \ \Rightarrow \ x = 2)$ は偽であるが，それは，その否定（と同値な）
$(\exists x)(x^2 = 4 \wedge x \neq 2)$ が，$x = -2$ の存在によって真となるからである。

一方，命題 (2) の <u>対偶</u>

$$(\forall x)(\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)) \quad \equiv \quad (\forall x)(q(x) \vee \neg p(x)) \tag{4}$$

は一般にもとの (2) と同値である。今の例では

$$(\forall x)(x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2) \tag{5}$$

が正しい。もし $x^2 \neq 4$ ならば，常に $x \neq 2$ であり（もし $x = 2$ ならば $x^2 = 4$ だから，$x^2 \neq 4$ という仮定に矛盾する），決して $x = 2$ であり得ない。だから $x = 2$ であるためには，$x^2 = 4$ で <u>なければならない</u>。言葉を変えると「$x = 2$ であるためには，$x^2 = 4$ であることが必要」なのである。この（対偶の形を使う）議論では，「でなければならない，必要である」などの，日本語の日常の用法に素直に従っている。そのことを教師は知っていなければならない。

3 十分・必要と多い・少ない

「条件 $p(x) \Rightarrow q(x)$」は，

「条件 $p(x)$ は条件 $q(x)$ よりも（拘束が）強い，$q(x)$ は $p(x)$ よりも（拘束が）弱い」

ことの表現である。あるいは，

「条件 $p(x)$ は条件 $q(x)$ を 含む，$q(x)$ は $p(x)$ に含まれる」

と言い換えてもよい。英語での $p(x) \Rightarrow q(x)$ の表現は

$p(x)$ implies $q(x)$.　　If $p(x)$, then $q(x)$.

などである。前者の implies は（意味する，とも訳すが）本来が含むという動詞である。

条件についての「強い・弱い 」や「含む・含まれる」をさらに言い換えると，「多い・少ない」になる。

これまでの例で，$x^2 = 4$ は $|x| = 2$ と同値であり，$x = 2$ は $|x| = 2 \wedge x > 0$ と同値であるから，命題は

$$(\forall x)(\ |x| = 2 \wedge x > 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 2\ ) \tag{6}$$

と変形される。第1の条件 $x = 2$ は2つの条項 (items)$|x| = 2$ と $x > 0$ よりなり，第2の条件 $x^2 = 4$ は第1条件の2条項の一つ $|x| = 2$ だけを取り出したものである。

もう一つ例を挙げよう。

> 自然数 n が 3 の倍数であるためには, 6 の倍数であれば十分である。
> 自然数 n が 6 の倍数であるためには, 3 の倍数であることが必要である。

条件 6 divides n は (3 divides n) $\wedge$ (2 divides n) と一致し，条件 3 divides n を一つの条項として含んでいる。“ 3 のマスク ”（自然数の配列から 3 の倍数以外をマスクし，3 の倍数だけを可視化するシート）は“ 2 のマスク ”と重ねることで, “ 6 のマスク ”と同等となる。“ マスク ”は条件の物化であり，2枚のマスクよりなる条件 $6|n$ は1枚の条件 $3|n$ を含んでいる。

次のような見解が教育界の一部にもあるようだ。

> 日常言語の十分・必要の用法と数学の述語としての用法はずれていて，むしろ逆である。日常言語では「多いほど十分，少ないほど必要な最小限に近づく」筈なのに，数学述語では逆になっていて「十分が少ないに対応し，必要が多いに対応」している！

ここでは，条件と集合の関係で混乱があると思われる。

外延的に「条件を満たす要素の集合」に着目すると，含む・含まれるの関係が条件自体と集合では逆転する。

条件 $x = 2$ と $x^2 = 4$ に対応する集合はそれぞれ $\{2\}$ と $\{2, -2\}$ であり，必要条件の集合が十分条件の集合を含んでいる。

6 の倍数の集合は $\{6, 12, 18, \cdots\}$ は, 3 の倍数の集合 $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\}$ に含まれる。十分条件の集合が必要条件の集合に含まれる。

ここから，必要条件は“ 大きい ”に結びつき，十分条件が“ 小さい ”に結びつく感覚が生まれるのだろう。集合に着目することが悪い訳ではないが，本来の考察対象が 内包的 な 条件 であったことを忘れてはならない。

4 数学以外の例

運転免許がとれる条件は年齢 18 歳以上である。人 x が運転免許証を所持していれば, x が 18 歳以上と判断するに十分な根拠となる。

運転免許証を取得する条項としては,

1. 18 歳以上である。
2. 技能試験に合格している。
3. 免許申請のさまざまな手続きをする（金も払う）。
4. 学科試験に合格する，

などがあり，「18 歳以上」という条件はそれに一条項として含まれている。だから，運転免許証があれば（偽造でないとして），18 歳以上が保証されるのである。

4.1　ルールとしての条件

条件は世の中のルールとして現れる。

飲酒は 20 歳以上に限る

というルールは条件に当たる。しかし，　命題

$$(\forall x)(\,(x \text{ は飲酒}) \;\Rightarrow\; (x \text{ は 18 歳以上})\,) \tag{7}$$

は多くの場合, 真でなく偽である。たとえば，大学一年生のクラスコンパなど，多くの場合にこのルールは守られていない。

このような，命題が真だという保証がない場合，　x がビールを飲んでいるからといって，それは x が 20 歳以上であることを保証しない（つまり，十分条件ではない）。

ルールが守られているかどうかのチェックが，この場合の話題である。

(7) は

$$(\forall x)((x \text{ は飲んでいない}) \vee (x \text{ は 20 歳以上})) \tag{8}$$

であり，その否定は

$$(\exists x)((x \text{ は飲んでいる}) \wedge (x \text{ は 20 歳未満})) \tag{9}$$

である。

ルールが守られているかどうかのチェックとは，飲んでいる人について，年齢を調べ（20 歳以上であるかどうかを確認し），　あるいは 20 歳未満の人について，本当に飲んでいないことを確かめる作業である。飲んでいない人，20 歳以上の人はそれだけで O.K. である。