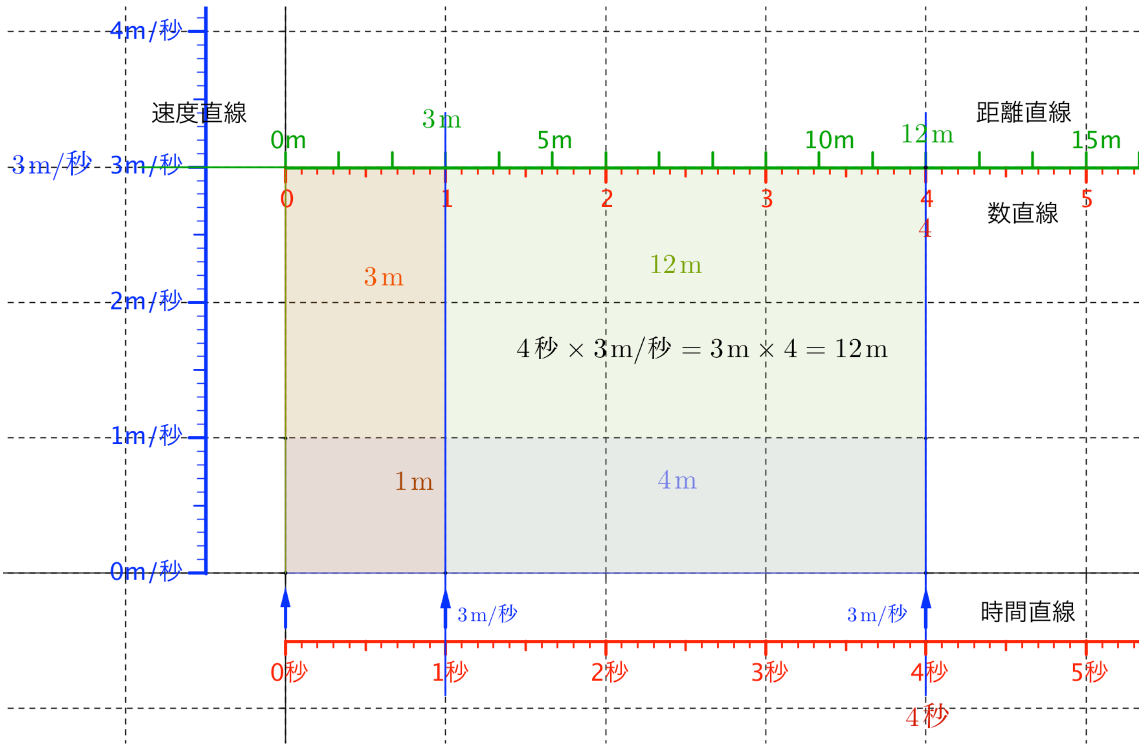
2012年5月7日　　　小島 順

時間 × 速度 と 数直線

森 誠治様
手紙（メール）のこれから先きは PDFファイルで添付します。

速度 3 m/秒 を固定し，それが時間直線に × 3 m/秒 として作用する状況を考えます。3 m/秒 は速度直線上の点であると同時に，時間直線に距離直線を対応させる比例の働きとして青い縦の矢線（3本）でも表現されています。1秒に 3 m が対応し，4 秒にはその 4 倍の 3 m × 4 = 12 m が対応します。これが比例（線型作用）です。数直線は初め時間直線に重なって存在したものが，上に移って距離直線に重なった，と思うと自然で，そう思うことにします。



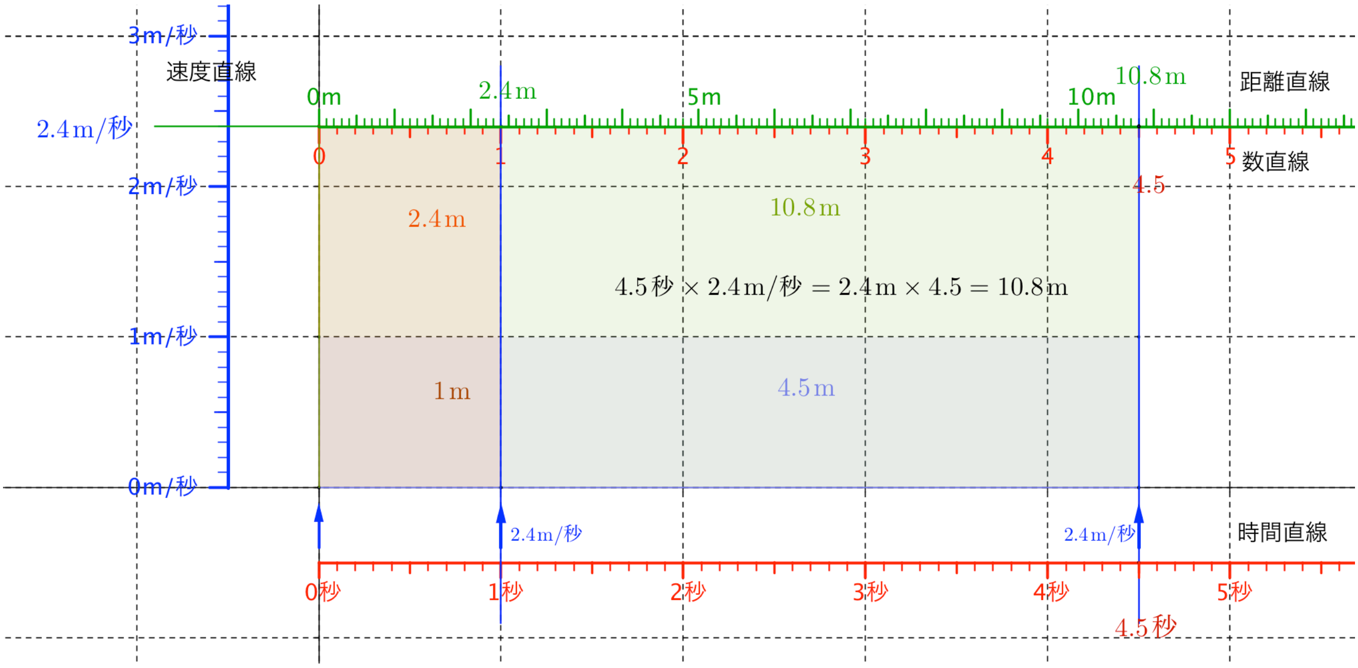
数直線のサイズは（時間直線に合わせて）固定されていて，ここでは、距離直線の方が可変です。速度 3 m/秒 に従って，数直線の1 に 3 m が重なるように（時間直線の 1秒の真上に 3 m が来るように）距離直線が伸縮により調整されています。私は「量×量の掛け算のときにも，その内部の構造として量×数があるのだから，”可変数直線”のアイディアは生かされる」と漫然と考えていました。しかし，可変なのは数直線ではなくて（ここでは）距離直線でした。森さんの問題提起のおかげではっきり認識できました。

しかし，最初に時間直線を描くときには長さの任意性があり，しかもコンピュータ画面自体の拡大縮小とともにそれも絶えず変動しているのだから，時間直線に重ねることで（単位 秒 を取り去ることで）作り出される数直線が，この初めの段階ですでに変動しまくっています。「剛体としての物差しが一本ある」という状況とは全然違う。その意味ではこれは「可変物差しの世界」の事柄ではあります。

次に距離直線の目盛りを細分します。小数第1位までの計算を図化するためです。私の目では細か過ぎて見づらいのですが，虫メガネを使うとはっきり見えます。

$$4.5\text{秒} \times 2.4\text{m/秒} = 2.4\text{m} \times 4.5 = 10.8\text{m}$$

という計算です。「結果は小数第2位までである」が一般的な中で，第1位で終わるものを選び出したわけで作為的です。



4.5 秒 の真上に 4.5 があり、それと10.8 m が重なっていることを見るために，青の垂直の線分を一種のカーソルとして利用しています。順序としてはその前に，1秒の真上に1があり，それが2.4 m と重なっていることが別の青の垂直の線分で示されています。数直線を距離直線と重ねることで，2.4 m × 4.5 = 10.8 m という”数を掛ける計算”が視覚的にも明確に表現できます。

状況の式の「 4.5 秒 × 2.4 m/秒 」には「点 4.5 秒 に 矢線 2.4 m/秒 が作用」という視覚上の表現が対応し，ここでも両者が合わさってその意味を明確に伝えます。

以上の二つの数値例は”標準的”方法でした。すなわち，速度を固定して，それを変量である時間に”比例”として作用させました（速度は矢線として表示されています）。

次に、立場を交換し，時間を固定し変量である速度への比例作用として扱います（時間が矢線として表示されます）。この”非標準的”方法では式の形は

$$3\text{m/秒} \times 4\text{秒} = 4\text{m} \times 3 = 12\text{m} \qquad 2.4\text{m/秒} \times 4.5\text{秒} = 4.5\text{m} \times 2.4 = 10.8\text{m}$$

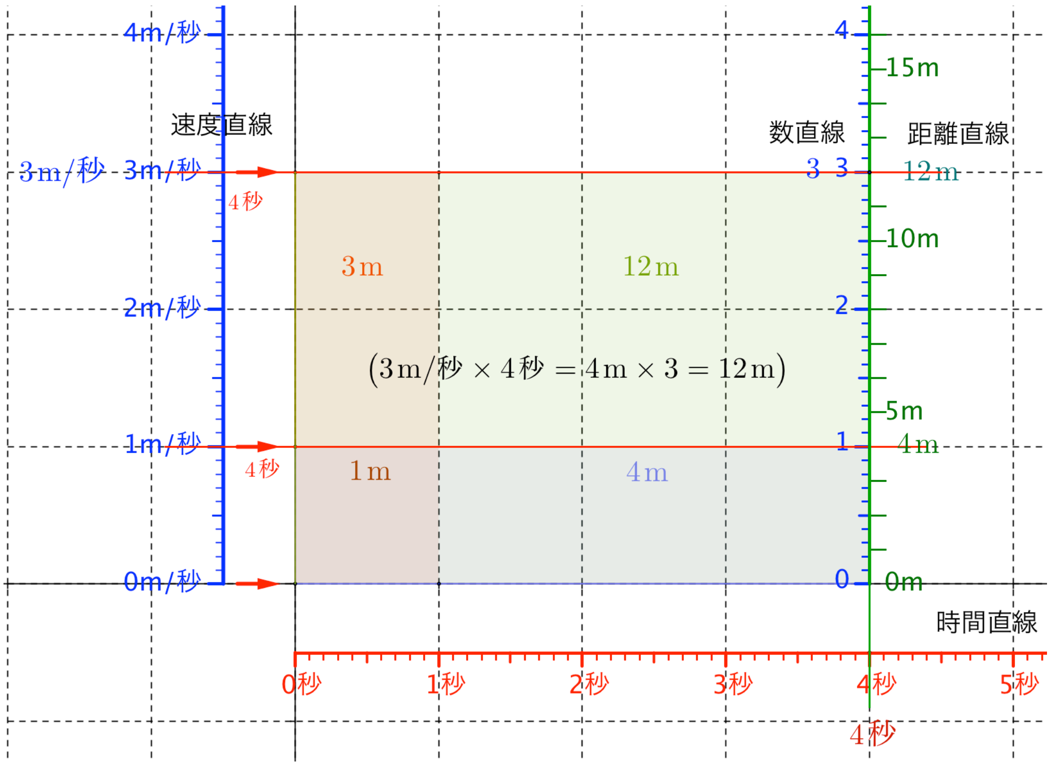
と変わります。この二式とも左辺の掛け算は（標準的方法と比較して）語順が逆転しています。第1式の左辺では 4 秒は作用（矢線）だから右から掛けています。中央の辺でも数の順序が逆転しています。

表題で”時間 × 速度”と書いたのは「この 2 変量 で決まる時間」という意味での順不同を前提とする表記でした。しかし文の中では，”時間 × 速度”と書けば速度が矢線として時間に作用し（標準的），”速度 × 時間”と書けば時間が矢線として速度に作用しています（非標準的）。「表題と文中で語順に関する態度が違う，式の意味がずれている」と言う問題が残ります。

次の図では時間直線の点である 4 秒 は，赤い水平の矢線 4 秒 としても現れ，比例の作用（働き）としての様相が強調されています。緑の距離直線は今度は縦（垂直）に現れます。数直線は速度直線のコピーとしてやはり縦で，これが距離直線と重なります。

矢線 4 秒 は平行に置かれた速度直線と距離直線の対応を与えます。1m/秒と同じ高さの 1 に 4 m が重なるように可変な距離直線が調整されます（この 4 m は矢線 4 秒 が点 1m/秒 に作用した結果の距離です）。この調整のもとで，3 m/秒 と同じ高さの 3 と重なる 12 m が計算結果の距離です。「3 と重なる距離を探す」は「4 m × 3」という 3 倍 の計算そのものです。 ここでは赤い水平な線分が一種のカーソルの役割をしています。

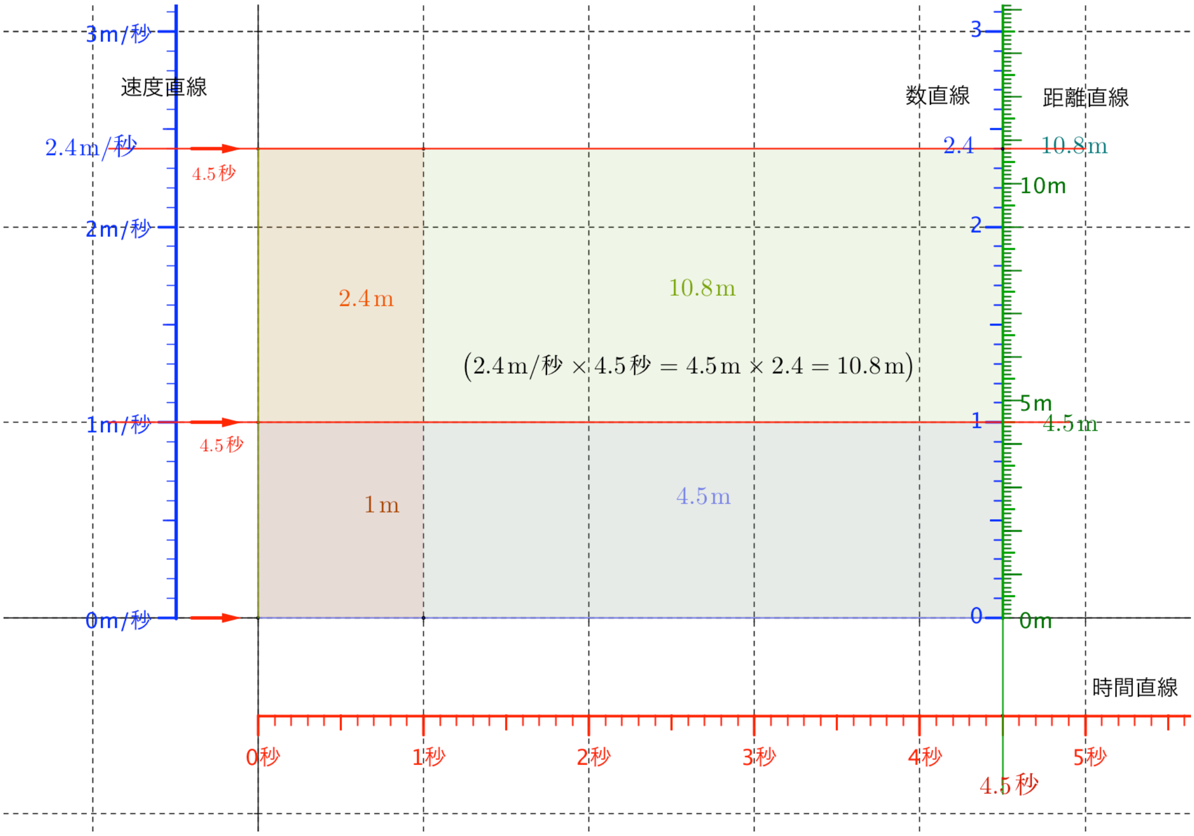
中間に「4 m × 3」というステップを挟んだ，三つの辺よりなる等式が図の中にも現れますが，この等式が，”プロセス”としての計算の「数式による表現」です。



二つ目の式に対応するために、図（次ページ）では距離直線の目盛りを細分しています。 下側の赤い水平のカーソルに 1m/秒 と 1 と 4.5 m が乗り，上側の赤いカーソルに 2.4 m/秒 と 2.4 と 10.8 m が乗っています。

「問題設定（状況表現）の 2.4 m/秒 × 4.5 秒 と結果の 10.8 m の間に 4.5 m × 2.4 というステップがある」，「このような一連の流れ（プロセス）として計算を捉える」ことは私が繰り返している主張ですが，GeoGebra による掛け算の図示の試みによって，「確かに人間の作業として，この 4.5 m × 2.4 のステップがある」と，改めて強く確信しました。

今は”非標準的”な方法について記述を進めていますが，もちろん標準的な，2.4 m /秒 を比例作用素とする状況設定「 4.5 秒 × 2.4 m/秒」 についても，中間ステップの”量×数” 「2.4 m × 4.5 ＝ 10.8 m」が実際の人間の作業として存在することがわかります。



距離の計算における”面積図”と”直線表示”を統合しなければなりません。一方を排斥するのは論外で，また，「面積図と直線表示を適宜使い分ける」だけでは不十分です。時間と速度の積なのだから，距離がこの文脈で二次元的な広がりの面積として出現するのは当たり前のことであるし，一方，距離そのものは典型的な一次元の量で，当然，直線上に目盛られます。この両者の関連を一つのプロセスとして，（最初の 1ページの例に則して述べると）「状況設定の 4秒 × 3 m/秒 から計算のステップの 3 m × 4 への移行」として捉えることが大事です。ここでの 4 枚の図は，このプロセスを視覚的に支えています。本当はこれは図ではなく，GeoGebra による，図もテキストも動的なセッションの断面ですが。

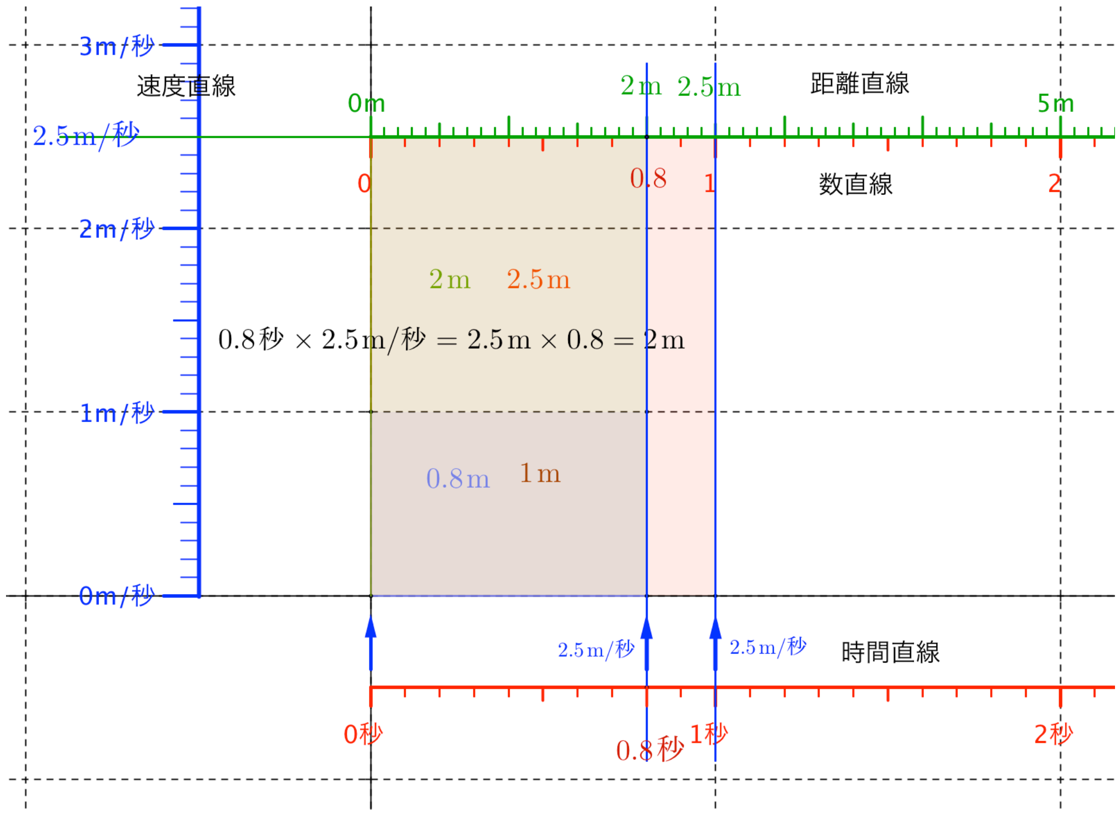
手紙として書くと，あまり構えずに，気楽に取りかかることができます。全体の構成を気にせず、取りかかることができます。

後，距離/時間 = 速度，距離 ÷ 速度 = 時間 についても，「数直線を取り込む」仕事が残っていますが，一休みします。この 「速度 × 時間 に数直線を取り込む」作業は前に作ったプログラムの手直しとして実行しましたが，なかなか面倒でした。疲れました。

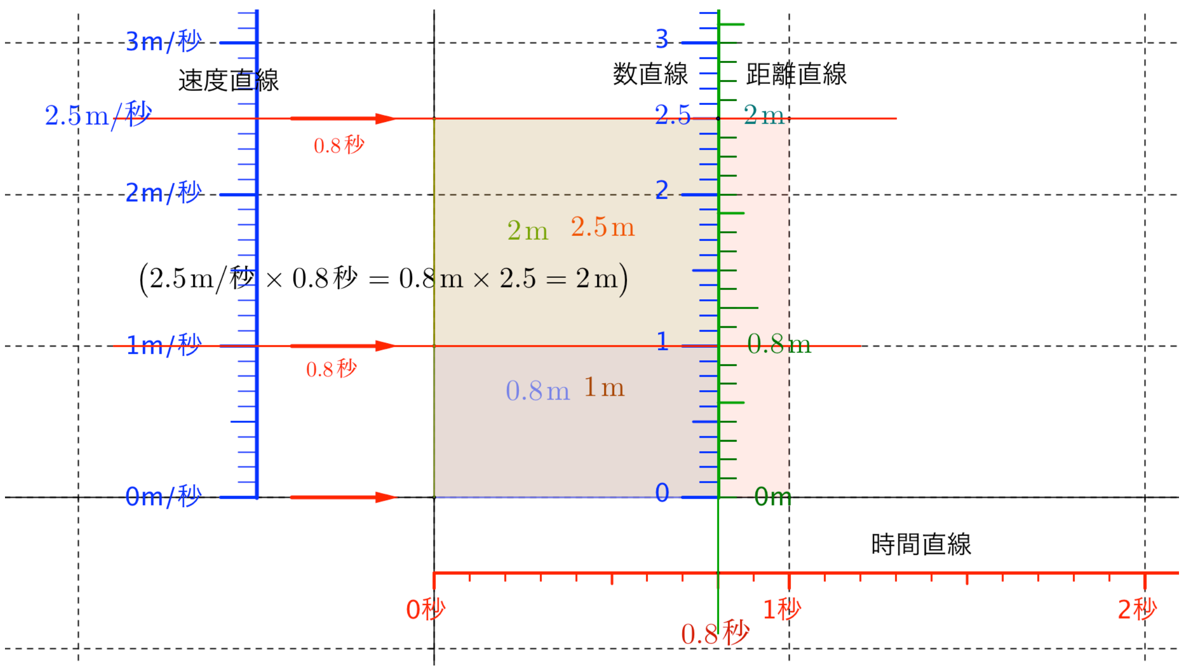
もう一度，このような試みの動機を与えてくれた森さんに感謝します。

亡くなった松井幹夫さんにも読んでもらい一緒に議論をしたかったという思いを押さえることができません。

付記： 0.8秒のときの距離の計算の図示。時間の連続的な変動の中で容易に理解できる。



時間 0.8秒 を固定し，速度を変量と見た場合（非標準的方法）の図示。



(2012年5月21日修正・加筆)