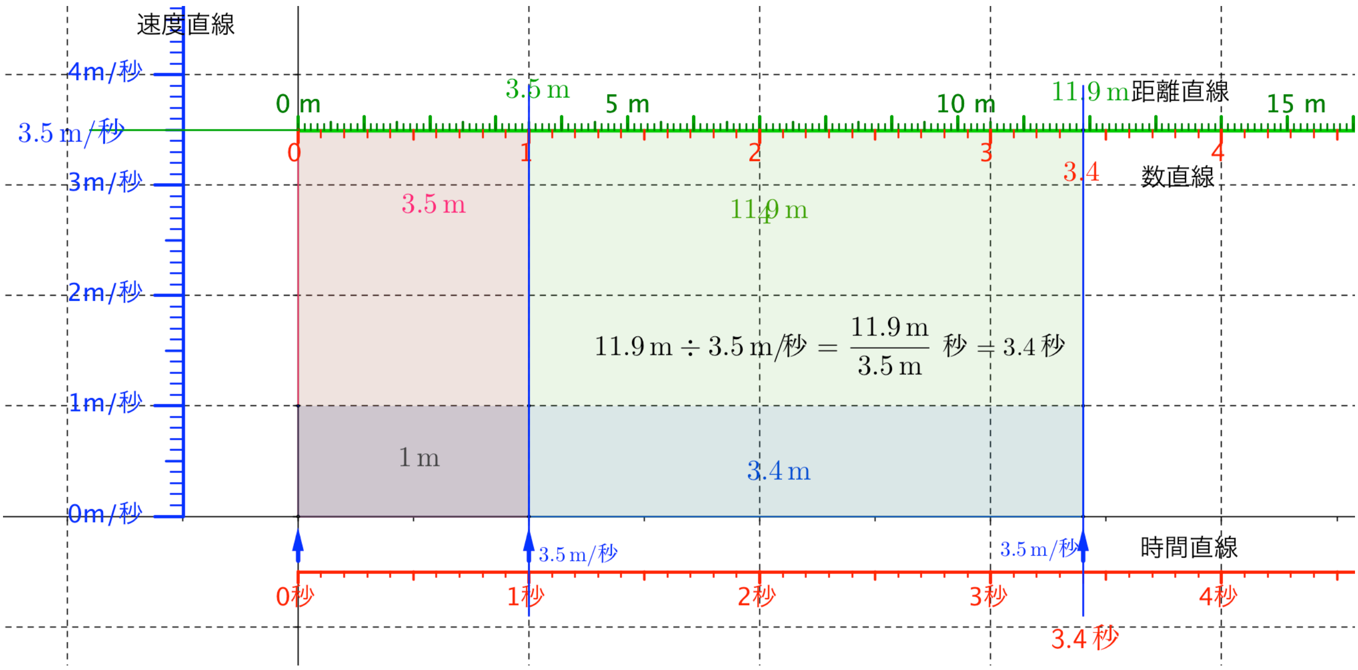
2012年5月26日，白楽サークル@神大
小島 順

距離 ÷ 速度，距離/時間 などの再論

これは，「時間 × 速度 と数直線」（2012年5月7日）の続きです。
詳しくは，距離 ÷ 速度，距離 ÷ 時間，距離/時間，距離/速度 の順に議論しています。割り算は掛け算の逆で矢線に沿う後退，比は"量分数"による矢線の構成です。速度を矢線と見るのが"標準的"，時間を矢線と見るのが"非標準的方法"です。

（1）距離 ÷ 速度 = 時間（標準的方法）

下の図では速度 3.5 m/秒 を矢線（比例作用素）として扱う（だから標準的方法なのである）。青い短い矢線 3.5 m/秒 に沿う前進が掛け算 × 3.5 m/秒 ならば，矢線に沿う後退が ÷ 3.5 m/秒 となる。両者は互いに逆の演算である。
3.5 m/秒 は青い速度直線の点でもあり，その高さに（縦座標が 3.5 m/秒 の位置に）緑の距離直線が置かれている。それは赤い時間直線と平行で，その数値部分だけを移して（距離直線と重なる）数直線が作られている。ただし，この数直線は本体が見えなくて目盛りだけがある。
矢線 3.5 m/秒 に関する後退は 3.5 m を 1 秒 にうつす。そのことを視覚的に表現するために，可変な距離直線を伸縮により調整し，数直線の 1 と 3.5 m を重ねている。これらの状況が左側の青い長いカーソルで示されている。このとき，右側の青いカーソルが示すように，11.9 m に重なる数直線の目盛りは 3.4 であり，11.9 m に対応する（ 矢線 3.5 m/秒 に沿う後退でうつる）時間は 3.4 秒 であることが分かる。

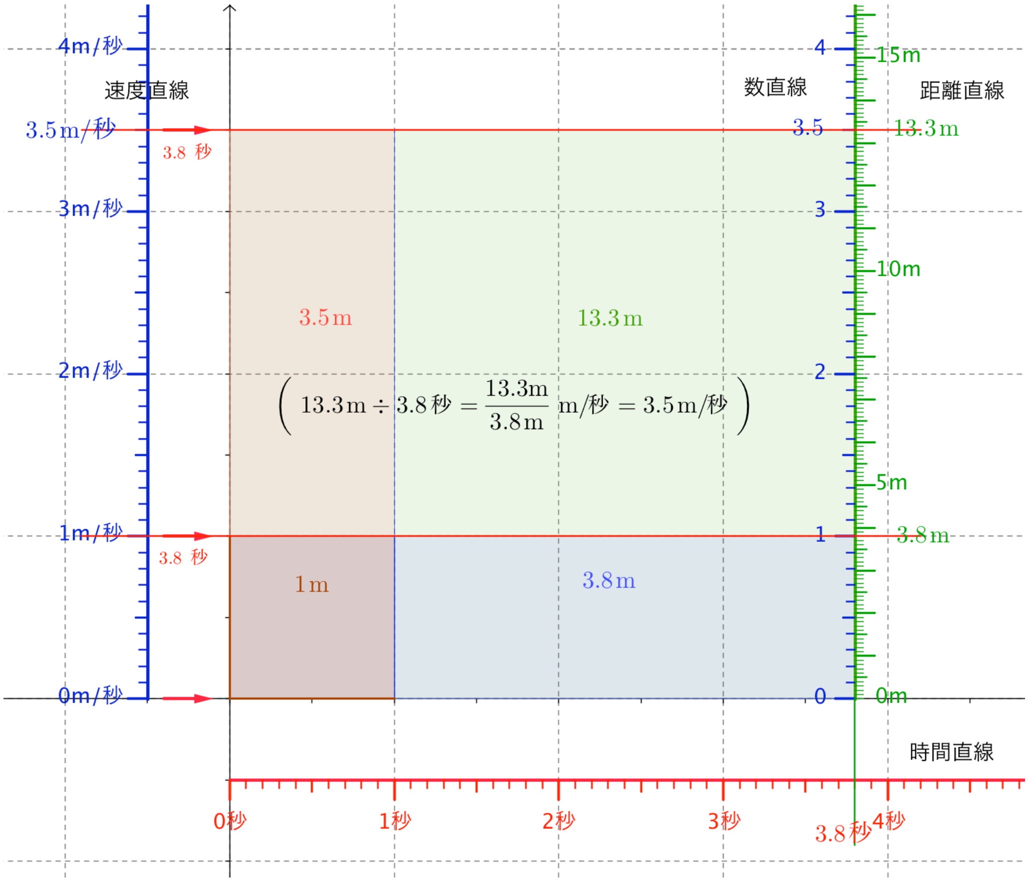


包含除（の拡張）11.9 m/3.5 m = 3.4 は掛け算 11.9 m = 3.5 m × 3.4 を意味する。それに応じて 1 秒 の 3.4 倍 の 3.4 秒 が 11.9 m に対応する。それが比例というものである。

$$11.9\,\mathrm{m} \div 3.5\,\mathrm{m}/秒 = \frac{11.9\,\mathrm{m}}{3.5\,\mathrm{m}}秒 = 3.4秒 \qquad 3.4秒 \times 3.5\,\mathrm{m}/秒 = 3.5\,\mathrm{m} \times 3.4 = 11.9\,\mathrm{m}$$

は矢線 3.5 m/秒 に沿う後退と前進という互いに逆の二つの式をセットとして並べたものである。第2式が第1式を定義している。矢線 3.5 m/秒 に沿う後退と前進の ÷ 3.5 m/秒 と × 3.5 m/秒 はともに右からの作用である。 ÷ 3.5 m/秒 との整合性の一点からも，速度 3.5 m/秒 を掛けるのは「左からの 3.5 m/秒 × 」でなく「右からの × 3.5 m/秒 」であるのが自然である。

（2）距離 ÷ 時間 = 速度（非標準的方法）



距離と時間から速度を求める計算として非標準的な方法を先きに扱う。標準的な方法は次の (3) で扱う。非標準的とは速度でなくて時間の方を矢線として扱うことを意味する。下の図で，3.8 秒 は 「速度 1 m/秒 に 距離 3.8 m を対応させる」ことで決まる比例作用素として機能し，水平な短い赤い矢線によって表現されている。3.8 秒 = 3.8 m/(m/秒) である。

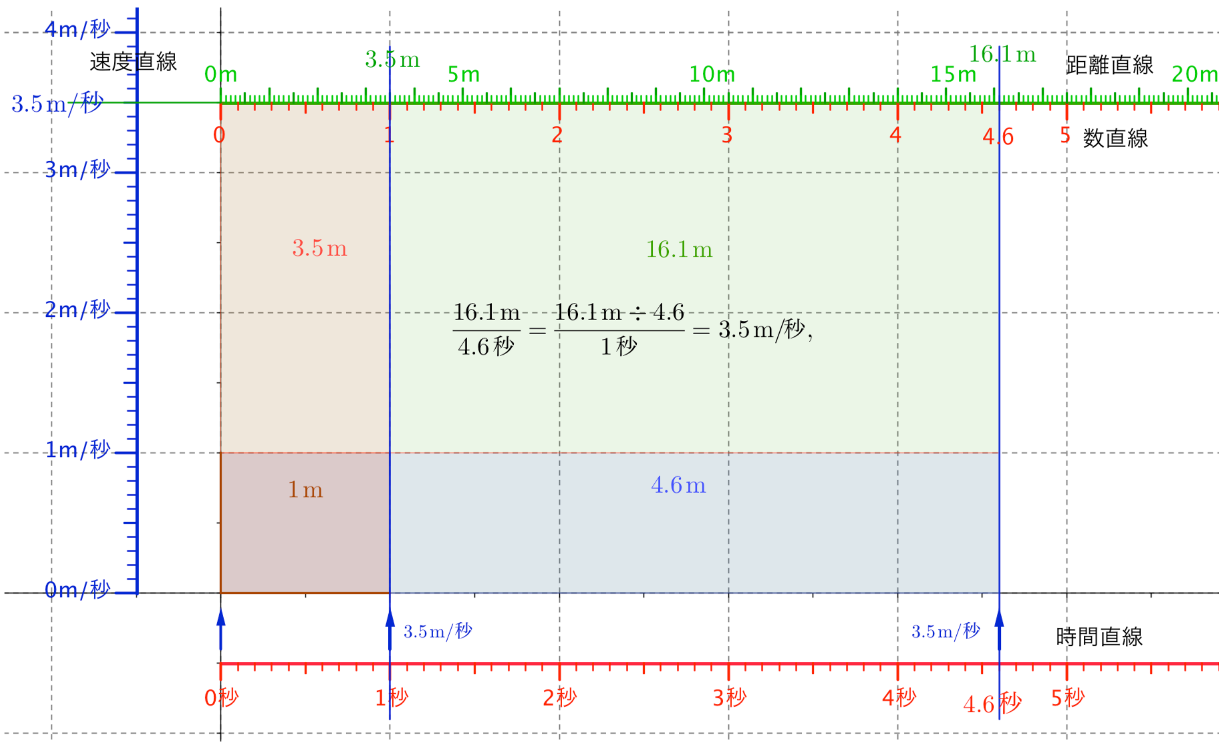
$$13.3,\mathrm{m} \div 3.8秒 = \frac{13.3\mathrm{m}}{3.8\,\mathrm{m}}\,\mathrm{m}/秒 = 3.5\,\mathrm{m}/秒 \qquad 3.5\,\mathrm{m}/秒 \times 3.8秒 = 3.8\,\mathrm{m} \times 3.5 = 13.3\,\mathrm{m}$$

÷ 3.8 秒 は矢線 3.8 秒 に沿う後退である。（1）の計算と構造が同じである。3.8 秒 はもともとは赤い時間直線の点であり，緑の距離直線は横座標が 3.8 秒 の位置に垂直に置かれている。それは青い速度直線と平行であり，速度直線の数値の部分だけが距離直線と重なる位置に移されて数直線を作っている（直線の本体はなくて目盛りだけ）。数直線の 1 と 3.8 m が重なるように（可変な）距離直線が伸縮により調整されている。これらの状況が下側の赤いカーソルにより表現されている。このとき，上側の赤いカーソルが示すように，距離 13.3 m に重なる数直線の点は 3.5 であり，したがって，13.3 m は矢線 3.8 秒 に沿う後退で速度 3.5 m/秒 に移る。出発から 3.8 秒後に 13.3 m の位置に到達するのは様々な速度の走者の中で秒速 3.5 m の走者であった。

数直線で読み取った 3.5 は包含除（の拡張） $\dfrac{13.3\mathrm{m}}{3.8\,\mathrm{m}} = 3.5$ と重なる。包含除は比という”量分数”の一種の計算であり，それは 13.3m = 3.8m × x となる x を $x = 3.5$ と見つけることである。

ここでも矢線としての時間 3.8 秒 による後退と前進の ÷ 3.8 秒 と × 3.8 秒 は互いに逆の演算であり，セットとして捉えることにする。 ともに右から作用している。第2式の第1辺の速度 3.8 秒は「左から作用している」のではなく「右から作用されている」のであり，（1）での主張と矛盾はしない。

（3） 距離/時間 = 速度（標準的方法）



矢線（比例作用素）としての速度を「時間と距離の比」として求めよう。それは「時間を分母に距離を分子に置く”量分数”」の形をしている。速度を矢線と扱う本来的な立場を”標準的”と呼んだのであった。

$$\frac{16.1\,\mathrm{m}}{4.6\,秒} = \frac{16.1\,\mathrm{m} \div 4.6}{1\,秒} = 3.5\,\mathrm{m}/秒,$$

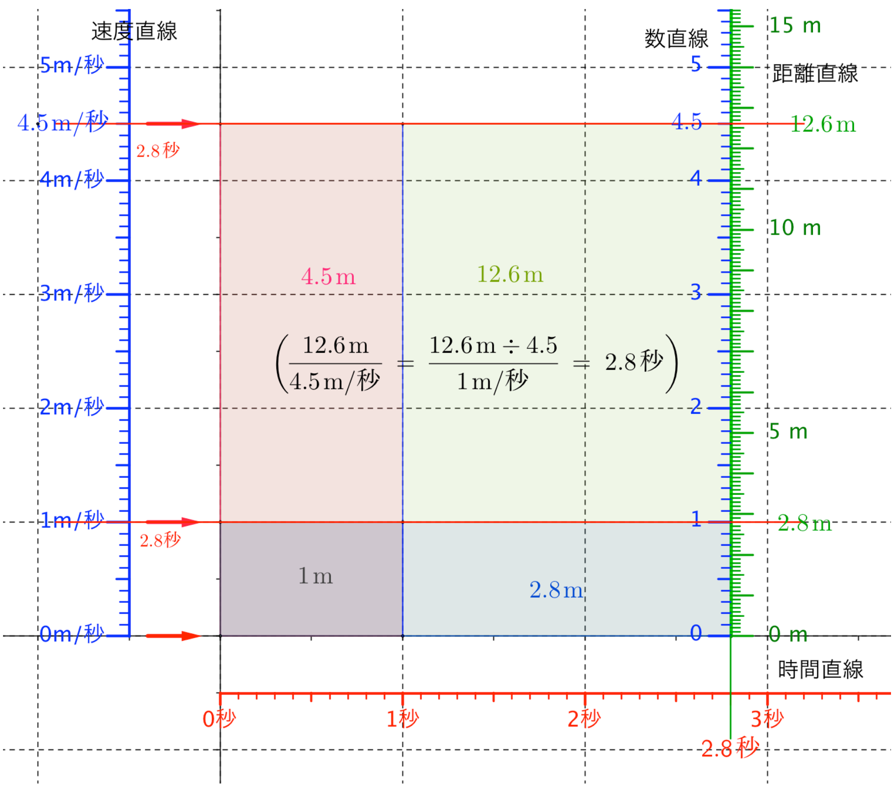
時間 4.6 秒 の真上に数直線の 4.6 があり距離 16.1 m がそれに重なっている。 数直線の 4.6 と距離 16.1 m が重なるように可変な距離直線の方が伸縮により調整されている。 青色の右側のカーソルがこれらの状況を表現する。このとき，数直線上の 1 に重なる距離を読み取ると 3.5 m であり，それが 1 秒 の真上にあることが左側の青色のカーソルで示されている。4.6 秒 と 16.1 m という二つのデータが定める等速運動の速度は 3.5 m/秒 となる。

ここで青色の上向きの矢線 3.5 m/秒 が図上に発生する。さらに，図における距離直線の”高さ”が速度直線の点 3.5 m/秒 の位置によって事後的に決まる（と言ってもコンピュータ上では瞬時に連続的に変動する）。距離直線のサイズ（縮尺）だけでなく，その高さも， 距離と時間という二つの変量に依存して決まる。

数直線上で 4.6 から 1 に戻るとき等分除（の拡張）1($4.6\,秒 \times 3.5\,\mathrm{m}/秒 = 3.5\,\mathrm{m} \times 4.6 = 16.1\,\mathrm{m}$ は 1 を 4.6 に運ぶことで決まる ”4.6 倍”という矢線であり， この矢線に沿う後退が等分除の ÷ 4.6 である。標準的な速度計算では等分除が現れる。（2）の非標準的方法では 13.3 m/3.8 m = 3.5 という包含除が現れていたことと対比される。包含除の方は割り算でなく比（量分数の仲間）として数直線上の倍率を計算している。

（4）距離/速度 = 時間（非標準的方法）

距離と速度から時間を求めるという目標は (1) と同じである。しかし，(1) では速度は矢線であり， それに沿う後退, すなわち，”÷ 速度 “ によって時間直線の点としての時間を探したのに対して， ここでは量分数 “距離/速度”として，矢線としての時間を探すことになる。時間の方を矢線扱いにするという意味で”非標準的”なのである。



この構造は (3) の 距離/時間 と同じである。二つのデータ 12.6 m と 4.5 m/秒 から時間 2.8 秒 が決まるのだが，距離直線はこの 2.8 秒 を横座標とする位置に来る。上側の赤いカーソルが示しているのは，4.5 m/ 秒 の高さに 12.6 m が来るように距離直線のサイズが調整されているということである。そのことで定まる比例作用素は 1m/秒 を 12.6 m ÷ 4.5 という距離にうつす。この等分除の結果の距離は 「12.6 m に数直線 の4.5 が重なっている状態での 1 に重なる距離 」として 2.8 m と測定される。この比例作用素は 2.8 m/(m/ 秒) であり，それは 時間 2.8 秒 と同一視されて，短くて赤い水平な矢線として視覚化されている。2.8 秒 は赤い時間直線の点でもあり，その上に距離直線が立つのであった。

距離の12.6 m は長方形の面積としても記載されている。

この量分数としての矢線 2.8 秒 は「分母 4.5 m/ 秒 を分子 12.6 m に掛け算で運ぶ」という条件で定義される。その掛け算の式も合わせたセットは

$$\frac{12.6\,\mathrm{m}}{4.5\,\mathrm{m}/\text{秒}} = \frac{12.6\,\mathrm{m} \div 4.5}{1\,\mathrm{m}/\text{秒}} = 2.8\text{秒} \qquad 4.5\,\mathrm{m}/\text{秒} \times 2.8\text{秒} = 2.8\,\mathrm{m} \times 4.5 = 12.6\,\mathrm{m}$$

となる。第2式の第1辺では 矢線である時間 2.8 秒 が右から速度 4.5 m/秒 に作用している。標準的な「 (1) 距離 ÷ 速度 = 時間」の式セットの第2式の第1辺では，時間 3.4 秒 は左に置かれて，矢線としての速度 3.5 m/秒 の右からの作用を受けていた。そのこととの対比を観察しよう。

「標準的な (1) の 距離 ÷ 速度 = 時間 」と「非標準的な (4) の 距離/速度 = 時間」を共通のデータで比較することは，GeoGebra のセッションにおいて，チェックボックスを使う切り替えで簡単に実現できる。同一の長方形を使うことになる。

同様に 「標準的な (3) の 距離/時間 = 速度」と「非標準的な (2) の 距離 ÷ 時間 = 速度」もチェックボックスによる切り替えによって，共通のデータで比較することができる。

（初出は　2012年5月19日，東数協・小学校月例研）