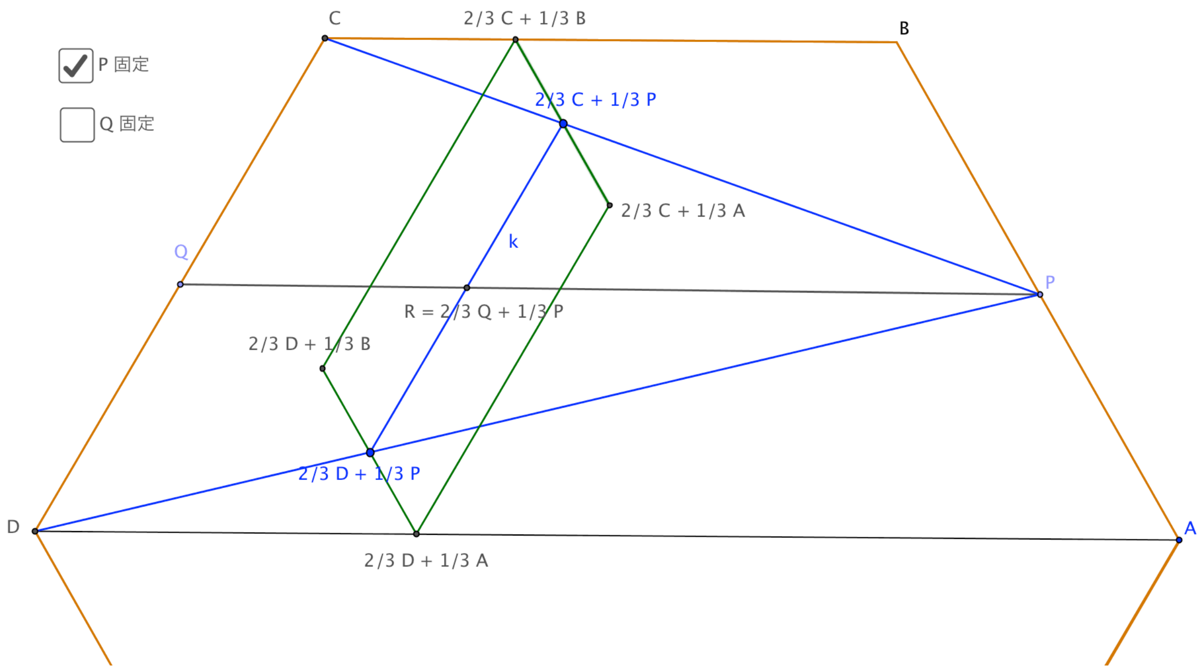
2018年4月28日　白楽サークル@神奈川大学
小島 順

点の平均について（小さなレポート）

2018/04/21 の東数協・月例研で塩沢宏夫さんが，数教協・高校集会での下町嘉男さんの話の紹介として，東大の入試問題の一つに触れた。それは次のようなものであった。

「辺の長さが 1 の正6角形（下の図）の，辺 AB 上に動点 P があり，辺 CD 上に動点 Q がある。P, Q を 2 : 1 に内分する点を R とする。　P, Q がそれぞれの範囲を動くときに R はどのような範囲を動くだろうか？　R の軌跡を定め，さらにその面積を求めよう。」

家に戻って GeoGebra で作図してみた。



説明：まず　R = 2/3 Q + 1/3 P　である。P を固定し Q を C から D まで動かすとき，R は

2/3 C + 1/3 P　から 2/3 D + 1/3 P までの（青い色の）線分 k

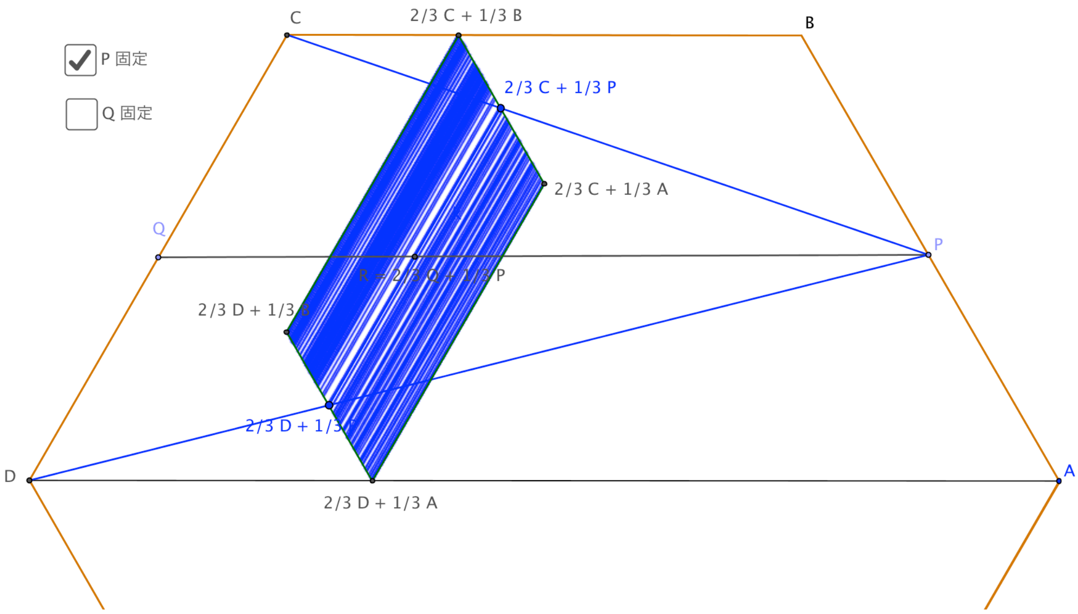
の上を動く。その上で今度は P を A から B まで動かすと，この青い動線分 k は，

”2/3 D + 1/3 A から 2/3 C + 1/3 A への線分” から

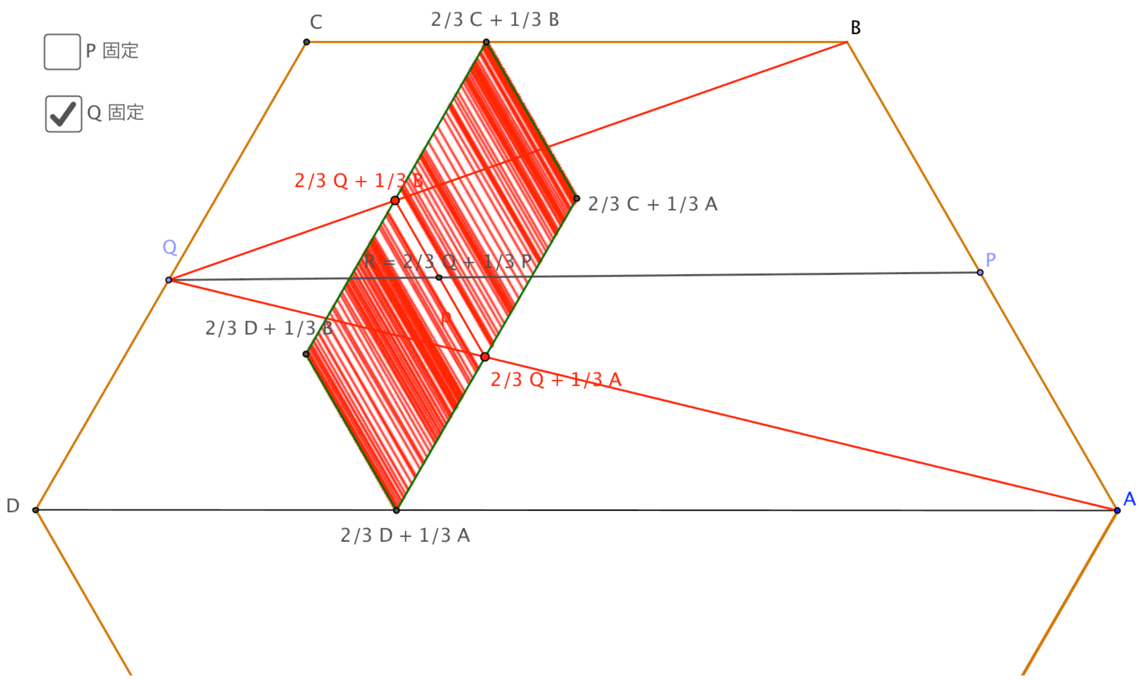
“2/3 D + 1/3 B から 2/3 C + 1/3 B への線分” へ

と変化する。<u>R の軌跡は緑色で囲った平行四辺形となる。</u>

　線分 k の “Trace On” にチェックを入れると，軌跡の図示ができる。なお，点 P の animation にチェックを入れることで，k を自動的に変化させることもできる。



　対称的に，点 Q を固定し， P を A から B まで動かすとき，R は 2/3 Q + 1/3 A から 2/3 Q + 1/3 B までの線分（赤い色の p）を動く。後は同様に・・・。
p の Trace On にチェックを入れて・・・。



線分 k の長さは 2/3, p の長さは 1/3 であり，$\sin 60° = \sqrt{3}/2$ だから，この平行四辺形の面積は

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.192$　（説明の終わり）

点の平均 — 基本的な演算 —

2点の和 $P+Q$ のようなものは存在しない。平均 すなわち $\lambda + \mu = 1$ のときの $R = \lambda P + \mu Q$ という演算が基本的である。P, Q にそれぞれ λ, μ という重みを与えた平均。それは

$$\lambda \overrightarrow{RP} + \mu \overrightarrow{RQ} = \lambda(P-R) + \mu(Q-R) = 0$$

というベクトルの式（モーメント ＝ 0 ）で特徴付けられる。

$1/3\,P + 2/3\,Q$ は P, Q を 2 : 1 に内分する。重みが大きい点の方が，平均の点を引き寄せる。

$-1/3\,P + 4/3\,Q$ は P, Q を 4 : 1 に外分する（4 : −1 に分ける）。重み −1/3 は平均の点を P から遠ざける。

$4/3\,P - 1/3\,Q$ は P, Q を 1 : 4 に外分する（−1 : 4 に分ける）。

学校教育では基本的な演算の構造が意識されることが少ない。「数教協」も例外ではない。
まず ベクトル（矢線）の演算がある（線型構造）。次に 点に矢線が（平行移動として，あるいは変位として）作用する：

$$P + \mathbf{v} = Q,\ \ Q - \mathbf{v} = P \quad \text{（前進と後退）}$$

後者は引き算の一つだが，もう一つの引き算は 点の差 $Q - P = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ である。（<u>小学校の低学年から，根底にこれらの構造がある！</u>　これまでも繰り返し強調してきた。）

2点の平均は一般有限個の 点の系に対する平均の点 “ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = R$ “ に拡張される。さらに点の系にたいするベクトルが “ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ のときの $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = \mathbf{v}$ “ の形で定まる。前記の点の差 $Q - P$ がその原型である。