2018/05/13,　　　数理科学・数理教育研究会@桐朋高校（国立市）

小島 順

幾何代数と幾何解析

— 数学と物理の統一言語としての —

2015/11/29 の 数理科学・数理教育研究会@亜細亜大学 で，私は「線形代数を幾何代数に拡張する — D. Hestenes に代表される数学・物理の潮流を取り込む —」という題目で話をしている。

今回，同じようなテーマを選んだ理由の一つは，高校学習指導要項（2022年度からの分）の公表を機会に，過去60年ほどの変遷の表を見て，ベクトル・複素数平面・行列・一次変換などが，10年ごとに出たり消えたり入れ替えたり，極めて恣意的に弄られていることに怒りを感じたからである。

最初に考察するのは，ベクトル，複素数，線型変換などの関連である。本来の，あるべき姿は何か。（「最初に」としたが，このペーパーはそれで終わっている。題名だけが大袈裟てみっともない）。

2015/11/29 の配布資料に文献表がある。それにこの配布資料自身を

[13] 小島 順　線型代数を幾何代数に拡張する，2015年11月29日

として追加しておく。

平面上の幾何代数

[13] の3ページ参照。$\mathbf{I}$ ではなくて $\mathbf{i}$ を使うことにする。

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{i}^2 = -1$$

$\mathbf{i}$ は $\sqrt{-1}$ としての資格を持っている。 $\mathbf{i}$ は虚数 i の一つの実現形である。$\mathbf{i}$ の二重性に注目しよう。　$\mathbf{i}$　は モノとしては 一つの有向面分（2-ベクトル，bivector, 2-blade ）であり，それは一つの量である。一方，

$$\mathbf{e}_1\mathbf{i} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{i} = -\mathbf{e}_1,$$
$$(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2)\mathbf{i} = x\mathbf{e}_2 - y\mathbf{e}_1$$

で，ベクトルに右から作用する $\mathbf{i}$ は，機能としては $\pi/2$ (90°) の回転 である。左からの $\mathbf{i}$ は $-\pi/2$ の回転である。

一般の回転　[13] の4ページ

単位ベクトルの順序対 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は回転 ($\mathbf{a}$ を　$\mathbf{b}$ へ移す回転）を定めるが，この回転が幾何積 $\mathbf{ab} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ である：$\mathbf{a}(\mathbf{ab}) = \mathbf{b}$ 。極めて単純明快。

$$U_\theta = \mathbf{ab} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$$

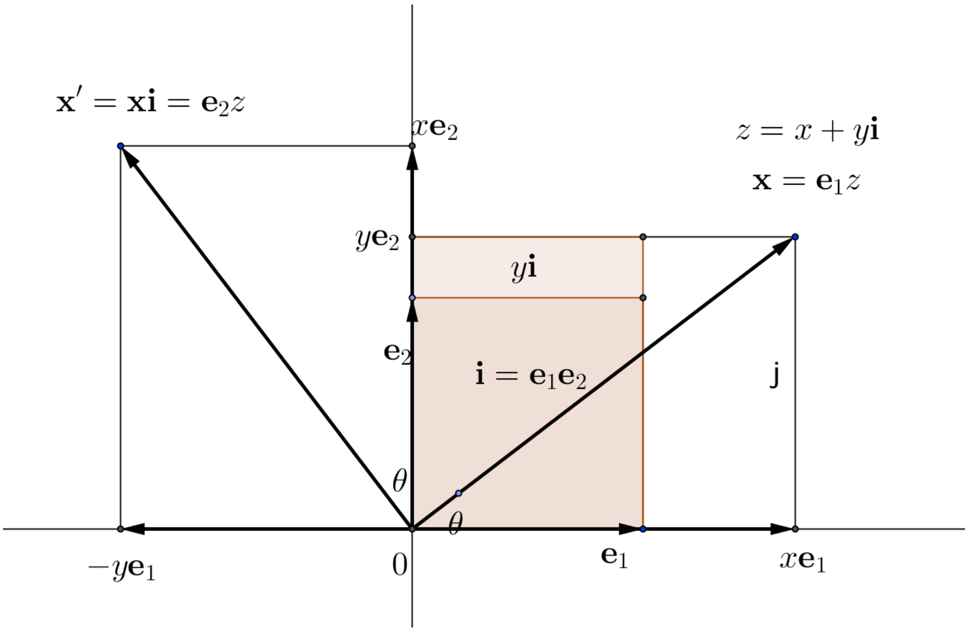
は 2-ベクトルではなく，0-ベクトル（スカラー）$\cos\theta$ と2-ベクトル（擬スカラー，pseudoscalar）$\mathbf{i}\sin\theta$の和である。擬であること（向きの影響を受ける）は $\mathbf{i}$ に吸収され，$\sin\theta$ は普通のスカラーとなる。角と回転が対応するが，θ よりも $\mathbf{i}\theta$ として角を捉える方ば筋が通る。

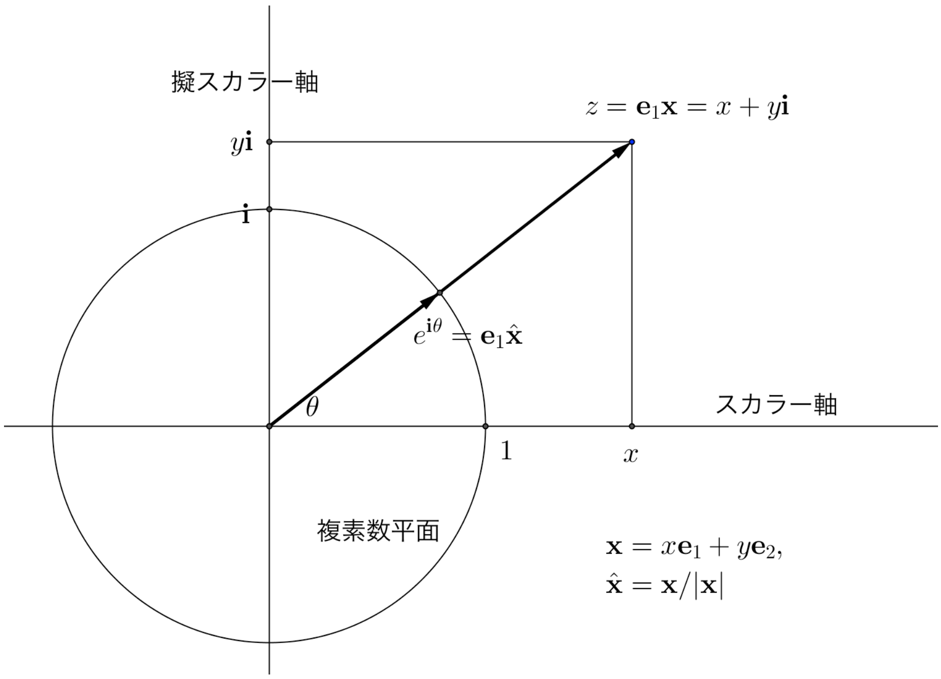
$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ では $\mathbf{i}\theta$ が角である。$\mathbf{a}U_\theta = \mathbf{b} = \cos\theta\mathbf{a} + \sin\theta\mathbf{ai}$

複素数

ベクトル $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ と複素数 $z = x + y\mathbf{i}$ を正しく関連付けよう。

$\mathbf{e}_1\mathbf{x} = z$，　$\mathbf{e}_1 z = \mathbf{x}$ である。複素数 z は $\mathbf{e}_1\mathbf{x}$ として構成され，$\mathbf{e}_1$を $\mathbf{x}$ に運ぶ作用をする。





複素数 z は $\mathbf{e}_1$ への作用の値によって表現される（その場所に置かれる）。それが複素数平面である。

3次元空間で

[13] の8ページ

平面ごとに複素数が発生する。しかし，空間全体で重要なのは，正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ に対する

$$i = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

である。$i^2 = -1$ で i が 3次元空間での虚数単位の候補となる（むしろ擬スカラー，pseudoscalar）。i の役割はベクトルと 2-ベクトル（bivector）の間のduality を導くことにある。[13]とは少しずれるが，

$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = i\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = i\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = i\mathbf{e}_3$$

が各平面での（2-ベクトルとしての）複素数にあたる。一般の 2-ベクトル $\mathbf{B} = i\mathbf{b}$ に対してその標準化（大きさを1に）を $\mathbf{i}$ と書くのが普通である。

$$\{1, \mathbf{e}_k, i\mathbf{e}_k, i\}, \quad k = 1,2,3$$

が幾何代数 $\mathbb{G}_3$ の線型空間としての基底となる。$\mathbb{G}_3$ の元の一般形は

$$A = \alpha + \mathbf{a} + i\mathbf{b} + i\beta$$

これを偶次数と奇次数で

$$\langle A \rangle_+ = \alpha + i\mathbf{b}, \quad \langle A \rangle_- = \mathbf{a} + i\beta$$

と分解する。$\langle A \rangle_+$ の全体は $\mathbb{G}_3$ の部分代数を構成し，四元数に相当する（$\mathbf{B} = i\mathbf{b}$ は $\lambda\mathbf{i}$ の形に表現できる）。Hestenes の [1] では 四元数（quatenion）でなくspinor （スピノル）と呼んでいる。それは 空間 $\mathbb{R}^3$ の回転-拡大 として作用し，回転の表現に利用される。

ベクトル積（クロス積）は

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

として（外積の双対として）定義される。電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ に対する電磁場 F は

$$F = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$$

と書かれる。普通の教科書では $\mathbf{E}$ は極性ベクトル，$\mathbf{B}$ は軸性ベクトルとされている。しかし，磁場の本質は 2-ベクトル $i\mathbf{B}$ である。GA では2種のベクトルの区別は不必要となる。向きへの依存は 擬スカラー i に吸収される。

文献表について

[13] の他に

[14] D. Hestenes Spacetime Physics with Geometric Algebra， 2003

これは [7] の続きである。Hestenes の論文は ウェブサイト [8] から簡単に入手できる。

初歩的な入門として

[15] D. Hestenes Primer on Geometric Algebra， 2005

がある。高校の教材向き。[15] の online 版もある（2005, 2014）