

## 音程と音高の数学枠組み (平均律の場合)

(作業の途中)

音程

平均律に調律されたピアノで

音程を整数で

半音 = 1, 全音 = 2, 短3度 = 3, 長3度 = 4, 完全4度 = 5, 増4度 (=減5度) = 6, 完全5度 = 7,  
短6度 = 8, 長6度 = 9, 短7度 = 10, 長7度 = 11, 8度 = 12, ...

音高 (鍵盤名)

C, Cis(Des), D, Dis(Es), E, F, Fis(Ges), G, Gis(As), A, Ais(B), H, C<sub>1</sub>, Cis<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, Es<sub>1</sub>, E<sub>1</sub>, F<sub>1</sub>, Fis<sub>1</sub>, F<sub>1</sub>, ...

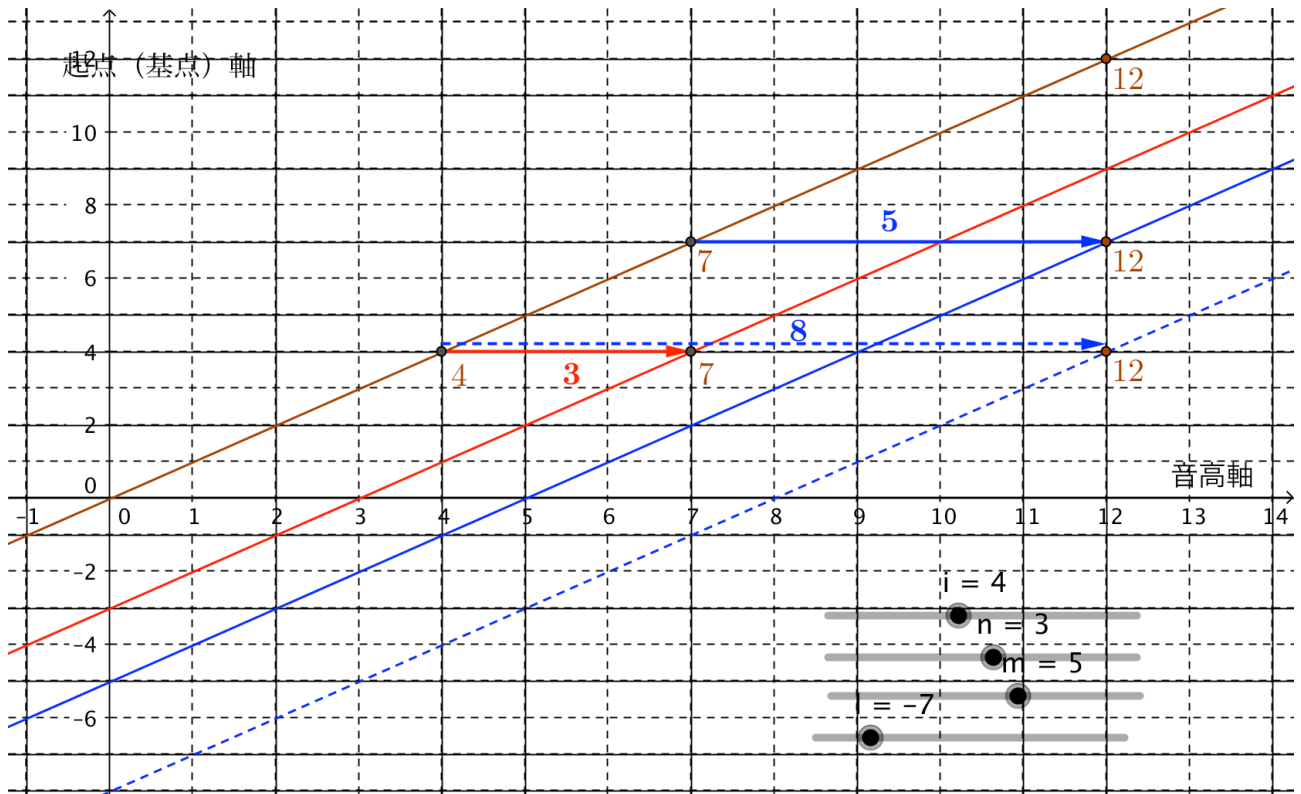
整数表示	音高名
-7 ≡ 5	F <sub>-1</sub>
-6 ≡ 6	Fis <sub>-1</sub> = Ges <sub>-1</sub>
-5 ≡ 7	G <sub>-1</sub>
-4 ≡ 8	Gis <sub>-1</sub> = As <sub>-1</sub>
-3 ≡ 9	A
-2 ≡ 10	Ais <sub>-1</sub> = B <sub>-1</sub>
-1 ≡ 11	H <sub>-1</sub> = Ces
0	C
1	Cis = Des
2	D
3	Dis = Es
4	E = Fes
5	F
6	Fis = Ges
7	G
8	Gis = As
9	A
10	Ais = B
11	H = Ces <sub>1</sub>
12	C <sub>1</sub>
13 ≡ 1	Cis <sub>1</sub> = Des <sub>1</sub>
14 ≡ 2	D <sub>1</sub>
15 ≡ 3	Dis <sub>1</sub> = Es <sub>1</sub>
16 ≡ 4	E <sub>1</sub> = Fes <sub>1</sub>

整数表示	音高名
17 ≡ 5	F <sub>1</sub>
18 ≡ 6	Fis <sub>1</sub> = Ges <sub>1</sub>
19 ≡ 7	G <sub>1</sub>

## 音程の表

整数表示	音程名	実現例	差の計算
0	同音	$\overrightarrow{CC} = 0$	0 - 0 = 0
1	半音(上昇)	$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CCis} = 1$	5 - 4 = 0 - (-1) = 1 - 0 = 1
2	全音	$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} = 2$	2 - 0 = 4 - 2 = 2
3	短3度	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CEs} = 3$	12 - 9 = 3 - 0 = 3
4	長3度	$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DFis} = 4$	4 - 0 = 9 - 5 = 2 - (-2) = 6 - 2 = 4
5	完全4度	$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DG} = 5$	5 - 0 = 7 - 2 = 4
6	増4度, 減5度	$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{CFis} = 6$	11 - 5 = 17 - 11 = 6 - 0 = 6
7	完全5度	$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HFis} = 7$	7 - 0 = 0 - (-7) = 5 - (-2) = 6 - (-1) = 7
8	短6度	$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AsC} = 8$	12 - 4 = 17 - 9 = 8 - 0 = 8
9	長6度	$\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA} = 9$	16 - 7 = 9 - 0 = 9
10	短7度	$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB} = 10$	5 - (-5) = 12 - 2 = 10 - 0 = 10
11	長7度	$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{FE} = 11$	11 - 0 = 16 - 5 = 11
12 ≡ 0	8度	$\overrightarrow{CC_1} = 12$	12 - 0 = 12
14 ≡ 2	長9度	$\overrightarrow{G_{-1}A} = \overrightarrow{CD_1} = 14$	9 - (-5) = 14 - 0 = 14
16 ≡ 4	長10度	$\overrightarrow{CE_1} = \overrightarrow{G_{-1}H} = 16$	16 - 0 = 11 - (-5) = 16
-7 ≡ 5	5度下降	$\overrightarrow{CF_{-1}} = \overrightarrow{GC} = -7$	-7 - 0 = 0 - 7 = -7
-5 ≡ 7	4度下降	$\overrightarrow{CG_{-1}} = \overrightarrow{GD} = -5$	-5 - 0 = 2 - 7 = -5
-12 ≡ 0	8度下降	$\overrightarrow{FF_{-1}} = \overrightarrow{C_1C} = -12$	-7 - 5 = 0 - 12 = -12

上付きあるいは下付きの数字（添数）は省略している。例えば2行目の  $\overrightarrow{HC}$  は  $\overrightarrow{H_{-1}C}$  か  $\overrightarrow{HC_1}$  のつもりである。差の計算の項を見ると  $0 - (-1)$  で前者を採用している。4行目の  $\overrightarrow{AC}$  も  $\overrightarrow{A_{-1}C}$  か  $\overrightarrow{AC_1}$  であるが、計算は  $12 - 9$  で前者を採用している。添数付き表示を文字どおりに採るならば  $\overrightarrow{HC}$  は下降音程  $-11$  の実現であり、 $\overrightarrow{AC}$  は下降音程  $-9$  の実現である。しかしこの表では最後の3行を除き音程はすべて正（上昇）としている（言い訳を書くよりは表を作り直した方がよいのだが）。



音高を目盛った水平な直線に，“音程（矢線）を置く起点”をパラメータとして指定した”基点付き音高直線”の層として平面が構成されている。

音程 **3**（短3度の上昇）が，ここでは音高 4 (E, ミ) を基点に置かれている。これを  $\langle 3, 4 \rangle$  と記す。この時の矢線の終点は音高 7 (G, ソ) で音高の順序対  $[4, 7]$  が  $\langle 3, 4 \rangle$  に対応する。

$$4 + 3 = 7, 7 - 3 = 4, \overrightarrow{47} = 7 - 4 = 3$$

が両者を結び付ける。

茶色の対角線でゼロ音程が各基点に載っている。この音程 **0** 直線を音高直線（基点なし）と同一視できる。音高順序対  $[4, 7]$  はこの茶の音高直線（にも）載っている。 $\langle 3, 4 \rangle$  の平面座標は  $(7, 4)$  である。赤い斜めの線上に基点を伴う音程の全体が載り，その同値類として赤い直線が音程 **3** を表現する，

二つの矢線（音程）**3, 5** の和

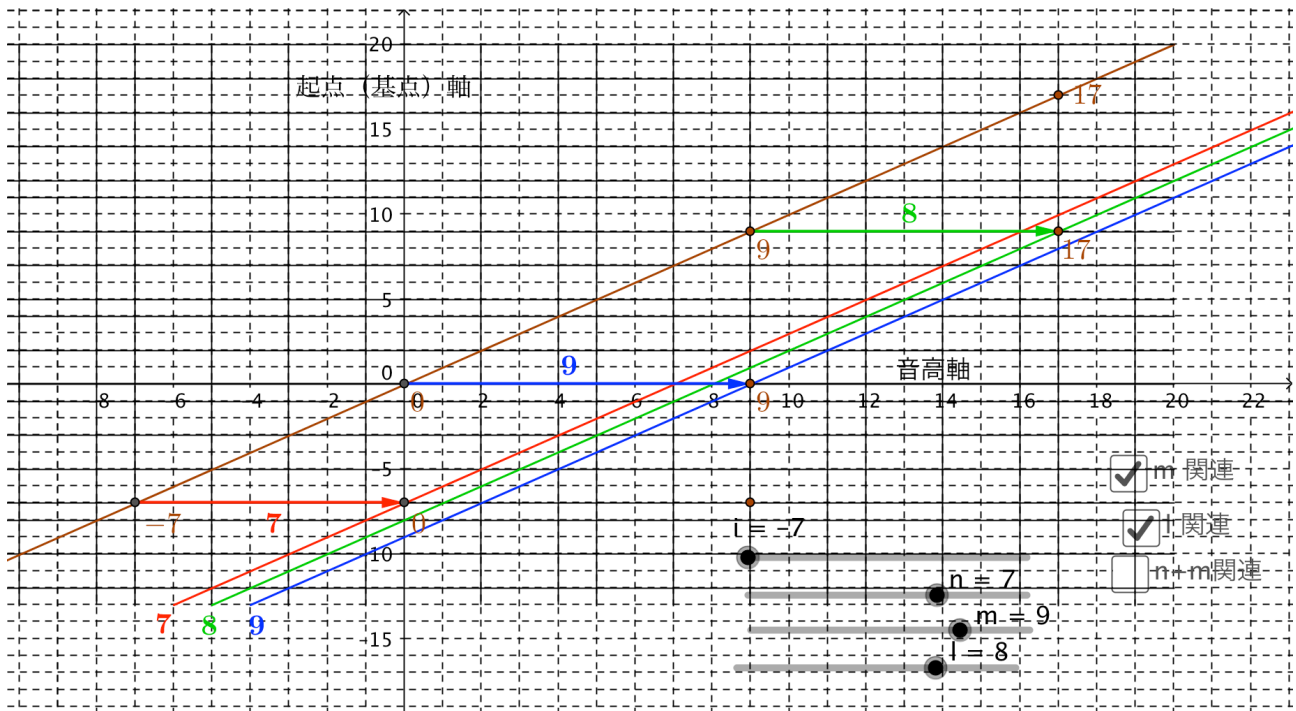
$$3 + 5 = 8 \text{ (短3度 + 完全4度 = 短6度)}$$

の基点 4 への作用を観察する。

$$4 + (3 + 5) = (4 + 3) + 5 = 7 + 5 = 12 = 4 + 8$$

## 音程列, 音程列と基点の対, 音高列

二つの音程 **3,5** の順序対 を **3|5** と記すことにする。基点 4 をパラメータ とする  $\langle 3|5, 4 \rangle$  は音高列  $[4, 7, 12]$  に対応する。 $[4, 7, 12] = [4, 4+3, 4+3+5]$  のように, この音高列は 4 に **3|5** をこの順序に作用させた途中経過のリストである。 $\langle 3+5, 4 \rangle = \langle 8, 4 \rangle$  が  $[4, 12]$  に対応することとの違いに注意しよう。



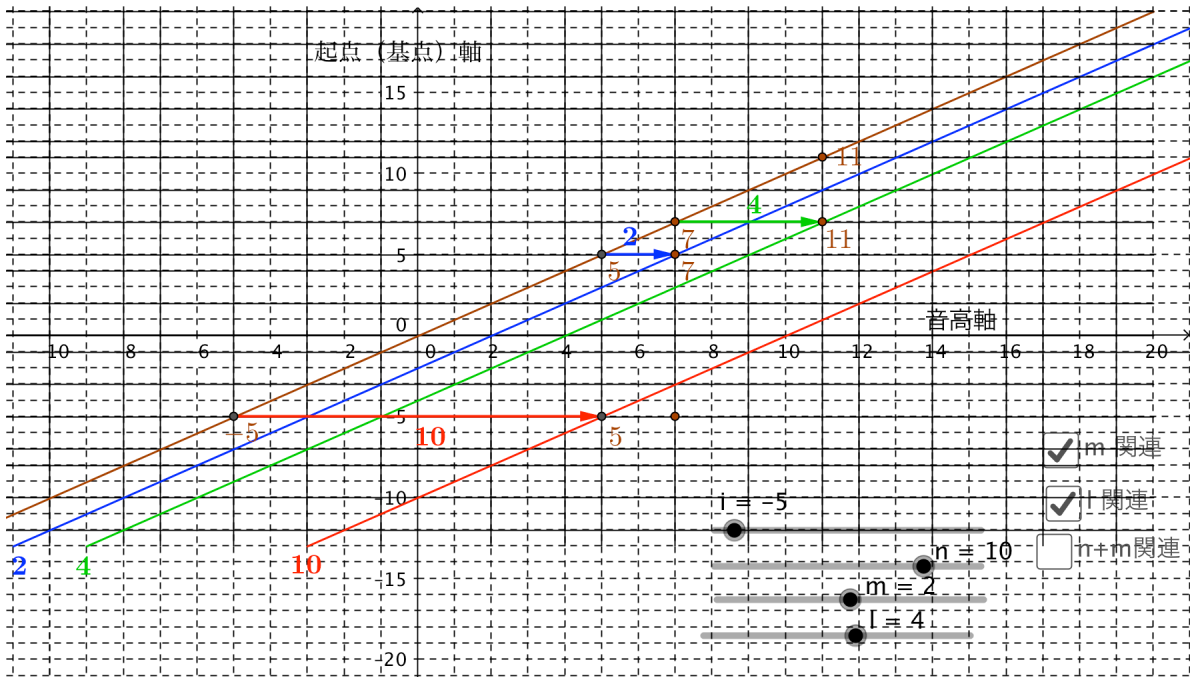
音程列 **7|9|8** (5度|長6度|短6度) と基点  $-7$  ( $F_{-1}$ , 下のファ) の対  $\langle 7|9|8, -7 \rangle$  には音高列  $[-7, 0, 9, 17]$  に対応する (17時が午後5時であることから, 17 が上の5 (上のファ,  $F_1$ ) であることが即座にわかる)。この音高列が茶色の 音程 **0** 直線 = 音高直線の上に並んでいるのが見える。

$$\langle 7|9|8, -7 \rangle \Leftrightarrow [-7, 0, 9, 17]$$

(次ページの図)

$$\langle 10|2|4, -5 \rangle \Leftrightarrow [-5, 5, 7, 11]$$

音程列 短7度|全音|長4度 と音高  $-5$  ( $F_1$ ) の対に 音高列  $[G_{-1}, F, G, H]$  が対応する。



下降音程を含む例

$$\langle -7 | 2 | -7, 9 \rangle \Leftrightarrow [9, 2, 4, -3]$$

音程列 5度下降|全音上昇|5度下降 と音高  $9$  ( $A$ , ラ) の対に 音高列  $[A, D, E, A_{-1}]$  が対応する。音程列と音高列は和音を表現し、あるいは音形 (ライン) を表現する。両者が統合される。

