2018/03/28　　@白楽サークル　　　小島順

小さい数の認知について（補足）

2018/02/17 の「白楽サークル@神奈川大学」において，私は過去の論考である

[1] 繰り上がりの足し算について（「数学教室」こ・そ・あ・ど　に掲載された文の原稿 2008/10/20）
[2] 小さい数の認知について　2011/12/26 (2018年2月17日に部分的修正）

を材料にしながら話をした。加藤久和さんと意見を交わすことができて良かった。

その後，2018/03/25, 26 の「数教協・小学校集会@海老名」 で低学年の算数・繰り下がりの引き算（加藤さん司会）の会場をのぞいて感じたこともあり，[2]の補足の形で書くことにした。

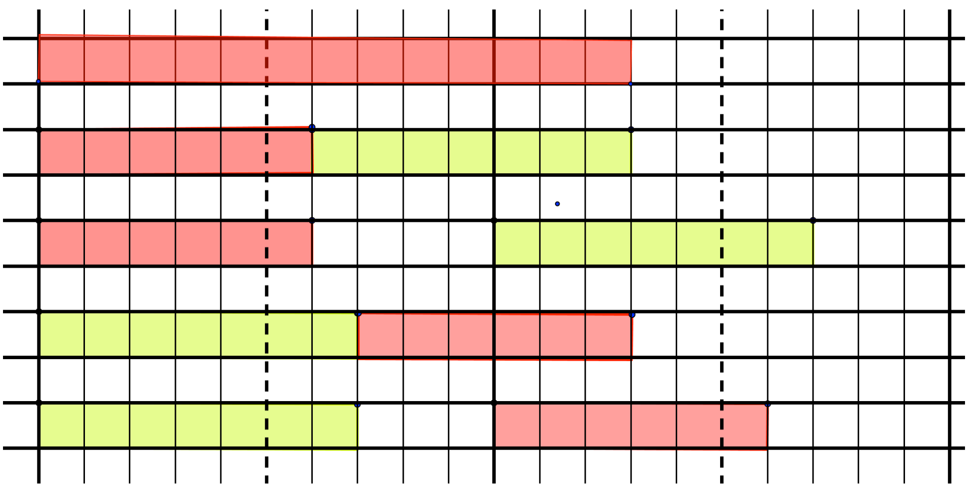
この海老名集会の
　　　何森 仁　記念講演：「いい授業をしよう！　でもいい授業って？」
の「要項」に

> 算数・数学は学校という「箱」に入れられ，子ども達の差別選別に利用され身動きが取れない。・・・　算数・数学に自由を！

という文言がある。

私は，教師が作る「箱」があると思う。その箱には数学というよりは子どもが閉じ込められている（箱の外に自由で豊かな数学がある）。何よりも教師自身が自分の作った硬い窮屈な箱に閉じこもっている！　教師は（子どもと一緒に）箱から出て，自由で柔軟な心と感覚を取り戻し，外の豊かな数学（それは現実・reality と重なっている）の世界で過ごすべきである。

上記の海老名の「繰り下がりの引き算」では $13-7$ という例題を扱っていた。[2] の足し算の続きとしてこの例題を考察してみる。



13 のタイルから 7 だけ減らすために，右から7個のタイルを黄緑に塗り替えている（コンピュータ上ではタイルを取り替えているのだが）。塗り替えた 7 を切り離すと 6 のタイルが残る。これは単純に「事実」の問題であり，目で見るだけで明らか，計算と呼ぶほどのことではない。下2行は 7 と13 の差を求めている。”点と矢線” の枠組みでは

$$13 - \overrightarrow{7} = 6,\ 13 - 7 = \overrightarrow{6}$$

という対比となる。これは　**点 + 矢線 = 点**　という足し算

$$6 + \overrightarrow{7} = 13,\ \ 7 + \overrightarrow{6} = 13$$

に相当する。（階段では，「13段目から7段下ると6段目」と「6段目から13段目までの段数は7」）。単に　$6+7=7+6$ という順序交換（加法の可換性）と見ることもできる。

$12-3$ や $12-9$ のような計算では，引き算のこの二つの順序

後退「点 − 矢線 = 点」　と　差「点 − 点 = 矢線」

の対比はより鮮明である。

[3]　「加減と乗除の構造を重ねる」　2017/09/23 東数協・月例研@日大文理（09/26 修正）　小島 順

では，負の数も含めた形で，この論点を整理している。（ウェブサイト　**小島順の数学教室** は全く未完成・未整理でみすぼらしく恥ずかしいが，これは載せている。これから充実させます！）

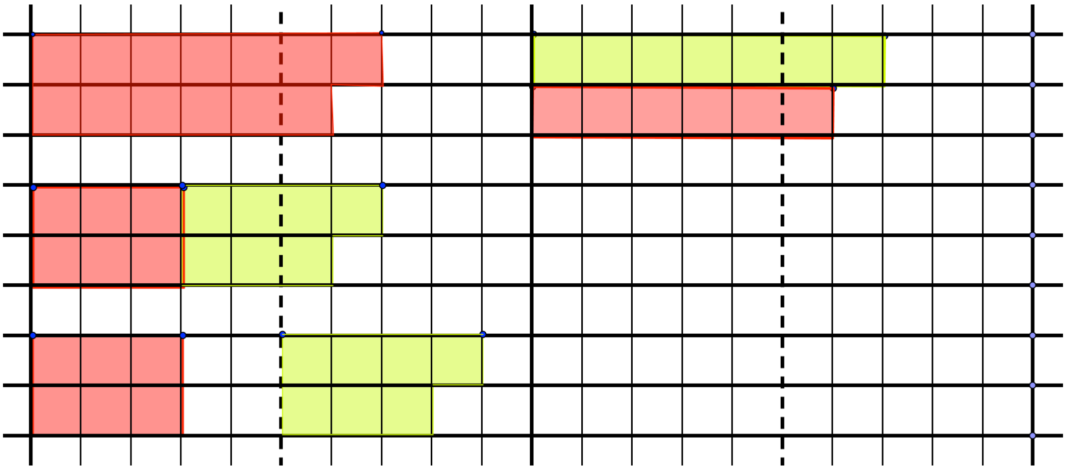
コメント：

1　足し算や引き算は，計算と言っても，結局は数を<u>数えている</u>のである。数えるのは　”はかる” ことの一つで，＂はかる”という和語は，計る，測る，量るなど漢字を使って表記されるが，これらは”はかる”という単一の言葉の表記の違いである（数をはかるときは，”計る”が普通）。

長さを測るときは物差し（メジャー）を使うように，数を計るにときは計数器（counter, acumulater)が使われる。今は 20 未満の小さな数を対象としているのだが，ここでは 10 を収める長い箱が基本となる。次ページの計算例で使っているのは格子（grid, lattice）をプリントしたシートで，その中で，10 の箱が明示されている（5の区切りもある）。一つ一つのタイル（正方形）を<u>消してはならない！</u>　目盛りのない物差しでは長さが測れないのと同じである（「数教協実践」の現況）。　コンピュータ上ではタイルをマウスで動かすのだが，紙のシートの上では “塗り絵”のような使い方もある。紙を切って作ったタイルを載せる使い方もある。

2　測るもの（計数器）と測られるもの（数）の二重性（duality）のなかで計数は進行する。

3　数（ここでは整数だが）の本質はその”直線性”である。左から右へ，<u>一直線に伸びていく</u>のがその本質。足し算はタイルを連結して新しい一本の線分を作ることである。（10進法の位取りや筆算の手順などは重要だが，別の話。ここでは20未満の数をよく知り，友達になり，仲良くなろうとしている。



4 “2行表示” の場合は：（上の図）

13という数は $12 = 6 + 6 = 6 \times 2, 14 = 7 + 7 = 7 \times 2$ という二つの偶数（ペアとなる数）に挟まれる奇数であり，$13 = 7 + 6$ は，13 の本来的で自然な分解と見ることができる。 このとき，$13 - 7 = 6$ という計算はもう終わっている（例題としてはちょっと困る!?）。

$7 = 4 + 3$ という 7の本来的な自然な分解（7 の”2行表示”）を使う方法をその下に描いたが，この方が，元の数が “2行表示” の場合の引き算の標準的方法である。

5 「箱」の中の儀式化

教師の作る閉ざされた「箱」の中で，外形重視，パフォーマンス中心，作法遵守を求める，学びの「儀式化」が進行する。「アクティブラーニング」は本来的にパフォーマンス中心の思想である。感覚的にすぐ分かること（結果が見えていること）でも，すぐ答えてはいけない！　色々と**「考えるふり」**が要求される。易しい単純なことが無理に複雑で難しいことに変えられる。そして集団での演技!　その一端を [2] で描写した。見せかけでなく内実に向かう「誠実さ」こそが大事。

6 柔軟さとバランス，多面性

3 で数の直線性を強調したが，4 ではそれと一見矛盾する2行表示を推奨した。少し弁解が必要かも。・・・・・・・・

7 ついでに：

$9 = 3^2$. $16 = 4^2$ のような”多行表示” (一般の長方形表示）や，キューブによる立体表示の方向も重要である（我々は何故か3次元空間に生きている）。$10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15}$ という系列

千 = thousand, 百万 = million, 10億 = billion, 兆 = trillion, 千兆 = quadrillion,

個数としては　kilo-　mega-, giga-, tera-. penta-（ 近似的に $2^{10}, 2^{20}, 2^{30}, 2^{40}, 2^{50}$)

1個のキューブの辺の長さを 1mm として，10億の立方体の1辺は 1m。人体の細胞数は 37兆とか 60兆とか。腸内細菌数は 100兆から1000兆の間だそうで。

数に対応する直線は大きな数ほど対数目盛の直線が実際的である（極小の方向にも）。・