2012/03/17（白楽サークル＠神大）
2012/04/14（東数協・月例研）

分数を掛ける・分数で割る

小島 順

分数 の例としての $\frac{2}{5}$ を $\times\frac{2}{5}$ という “掛ける働き”あるいは”倍変換”として捉える。すなわち，

$$\frac{2}{5} \,:\, x \mapsto x\times\frac{2}{5} \;;\; \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

という $\mathbb{R}$ の上の倍作用素（multiplication operator）として捉える。この倍作用素は分母の 5 を分子の 2 に移す。$5\times\frac{2}{5}=2$ あるいは $\frac{2}{5}:5\mapsto 2$ である。

実数 a を掛ける倍作用素は言うまでもなく比例であって（積の可換性！），”5 を 2 に移す”と言う条件 $5\times a=2$ によって $a=\frac{2}{5}$ と決定される。こうして 分数 $\frac{2}{5}$ は”分母 5 を分子 2 に運ぶ数”として特徴付けられる。分数は”二つの数の関係”としてこのように動的に捉えられる。これが分数の本質である。

距離に分数を掛ける

$10\,\mathrm{m}\times\frac{2}{5}=4\,\mathrm{m}$ という計算は $5\times\frac{2}{5}=2$ と重ねることでよく理解できる。以下はGeoGebra 4.2 によるセッションのコピーである。 スライダーが与える独立のパラメータ a と e, f がある。計算は $a\,\mathrm{m}\times\frac{f}{e}$ である（e が分母で f が分子である。この文字の選び方は単なる成り行きで，これが望ましい訳では全然ない）。

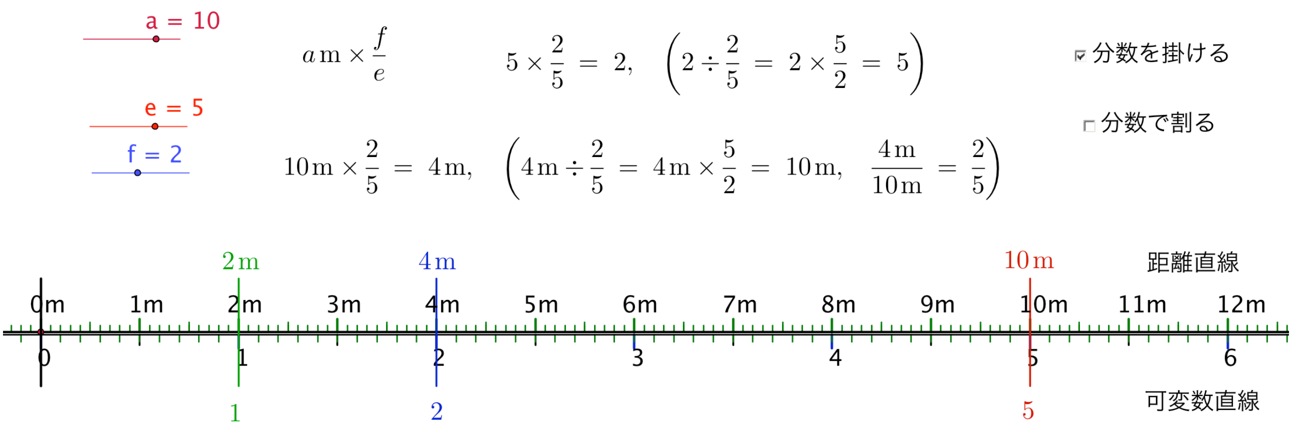

図1（距離に数を掛ける）

この図では，可変数直線（可変物差し）を使う。$a\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}$ と $\dfrac{f}{e} = \dfrac{2}{5}$ としている。掛け算対象の点 $10\,\mathrm{m}$ に 赤いカーソルを合わせる。次に 5 が赤いカーソルの位置に来るように実数直線を（伸縮により）調整する。このとき実数の 2 に青いカーソルを合わせる。青いカーソル上の距離直線の点が $10\,\mathrm{m}\times\dfrac{2}{5}$ で，それを読み取って掛けた結果の点 $4\,\mathrm{m}$ が出る（プログラムは以上を自動的に実行する）。

「$10\,\mathrm{m}$ を 5 と見たときの 2 にあたる長さが $10\,\mathrm{m}\times\dfrac{2}{5}$　$(= 4\,\mathrm{m})$」

という言い方も許されるだろう。

「テープ 5 切れ分の長さが $10\,\mathrm{m}$ のときの 2 切れ分の長さが　$10\,\mathrm{m}\times\dfrac{2}{5}$　$(= 4\,\mathrm{m})$」

という状況を表している。

$\dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}\times 2$ という分数の標準的な分解に対応して，前提（赤いカーソル）から結果（青いカーソル）に運ぶのに 1 と$2\,\mathrm{m}$ のペア（緑のカーソル）を経由している。すなわち

「$10\,\mathrm{m}$ を 5 等分し 2 倍」

している。

$2\,\mathrm{m}$ は$10\,\mathrm{m}$ と$4\,\mathrm{m}$ の”最大公約量”であり，その 5 個と 2 個としてそれぞれは存在する。その様子は図から明白に読み取れる。

動的テキストとしての数式では，括弧内に二次的に出現する割り算と比（二つの距離の比）を示した。

距離に対する演算は，距離直線に重ねた実数直線の演算に対応している。それも動的テキストとして併記した。

割り算 $\div\dfrac{2}{5}$ は掛け算 $\times\dfrac{2}{5}$ の逆作用であり，数のレベルでは分子の 2 を分母の 5 に運ぶ。したがって，これは分母分子を交換した掛け算 $\times\dfrac{5}{2}$ に一致する。長さへの作用としては，$\div\dfrac{2}{5}$ は青の $4\,\mathrm{m}$ を赤の $10\,\mathrm{m}$ に戻し（矢線に沿う後退），

$$2\div\frac{2}{5} = 2\times\frac{5}{2} = 5,\quad 4\,\mathrm{m}\div\frac{2}{5} = 4\,\mathrm{m}\times\frac{5}{2} = 10\,\mathrm{m}$$

となる。

数値を変えて掛け算

$a = 6.3,\ e = 3,\ f = 4$ という”仮分数”の場合を次の例にとる。これまでの記述と異なることは何一つない。

$7.2\,\mathrm{m} \div \dfrac{3}{4}$ $9.6\,\mathrm{m}$

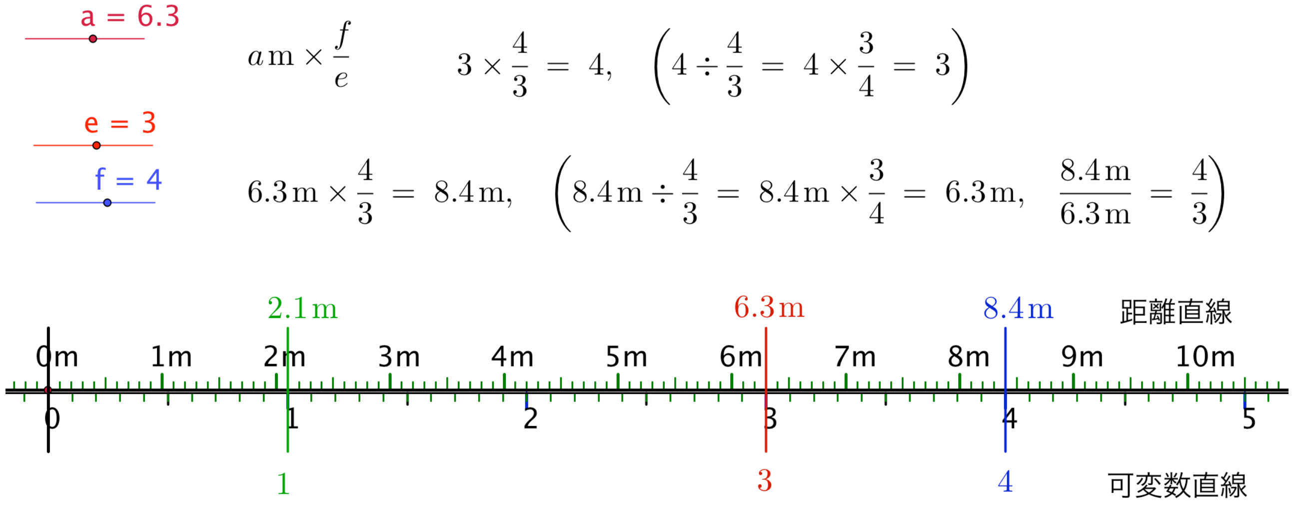

図2（仮分数による掛け算）

分数で割る

チェックボックス”分数を掛ける”をオフとし，”分数で割る”をオンにする。パラメータ e, f はこれまで通りだが，a は消え、新しい独立パラメータがスライダー b で与えられる。$b\,\mathrm{m} \div \dfrac{f}{e}$ を計算する。下の 図 3 では $7.2\,\mathrm{m} \div \dfrac{3}{4}$ を計算している。

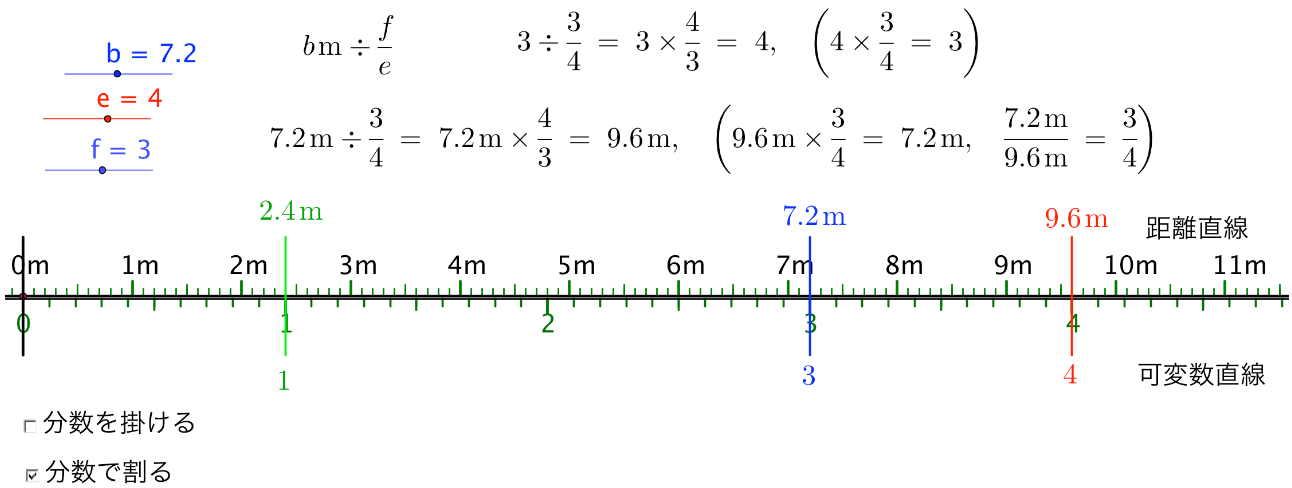

図3（距離を分数で割る）

最初に 青いカーソルが距離直線の点 $7.2\,\mathrm{m}$ に置かれる。次に，この青いカーソルと実数直線の交点が 3 であるように実数直線のサイズが調整される。そのまま 実数直線の点 4 に赤いカーソルが置かれる。この赤いカーソルと距離直線の交点が　　　　である。それを読み取って

置かれる。この赤いカーソルと距離直線の交点が $7.2\mathrm{m} \div \frac{3}{4}$ である。それを読み取って 9.6m である。

割り算 $\div\frac{3}{4}$ は掛け算 $\times\frac{4}{3}$ に等しく，それは $\times\frac{3}{4}$ の逆演算である。$4\times\frac{3}{4}=3$ のように，$\times\frac{3}{4}$ が分母を分子に運ぶ演算ならば，$3\div\frac{3}{4}=4$ のように，$\div\frac{3}{4}$ は分子を分母に運ぶ演算である。距離への数の演算に対応する（数への数の演算）も動的テキストの形で併記している。括弧内は二次的・副次的に発生する掛け算である。いつも割り算は掛け算とペアで理解すべきである。

この論考　「分数を掛ける・分数で割る」と前の「可変物差しと乗除」は，2月に亡くなった松井幹夫さんのことを絶えず思いながら書いた。”可変物差し”は九州の板垣さんの”割合測定器”そのものであり，私は松井さんの紹介でそれを知った。松井さんご自身が”割合測定器”を手がかりに，「量掛ける数」を正当に復活させ，さらにそれを「量掛ける量」の構成要素として正しく位置づける作業を開始し，大変精力的に行動された。最後のお仕事の一つ，
「算数たんけん 10：小数の掛け算の秘密」(まつい のりこ/松井幹夫共著，偕成社, 2012 年1月)にその成果の一部が残された。全計画からみて途中で終わったのは残念ではあったが。

私はそれを「コンピュータ上で実現する」という目標を掲げ，「可変物差しと乗除」の初稿にあたる僅か1ページのレポート（月例研に出したもの）を2011年の12月に松井先生にメールで送った。それが松井先生に見て頂いた（？）私の最後の作品になった。
今回，GeoGebra によるプログラムを全面的に書き直し，ドキュメントにあたるこの pages 文書も4ページに拡大された。さらに，”分数の扱いにも可変物差しを使う”というアイディアで，第二の論考「分数を掛ける・分数で割る」（とそれに先立つGeoGebra プログラム）を作った。この二つを松井先生に捧げたい（それにしては粗雑であるが）。