2011年12月21日　　小島 順

ピタゴラスの定理

直角三角形 ABC において，直角の対辺 AB は，直角を挟む二辺 BC, AC の AB への正射影 BL, AL によって分割される。<u>対辺 AB を長さを測る単位に選ぶ</u>ときの BC, AC の長さが a, b のとき，正射影 BL, AL の長さは a^2 と b^2 である(三角形の相似による)。こうして，

対辺の長さの，正射影による分割　　$1 = a^2 + b^2$

が得られた。「ピタゴラスの定理」は本質的にはこれがすべてである。ピタゴラスの定理は長さに関する定理である。

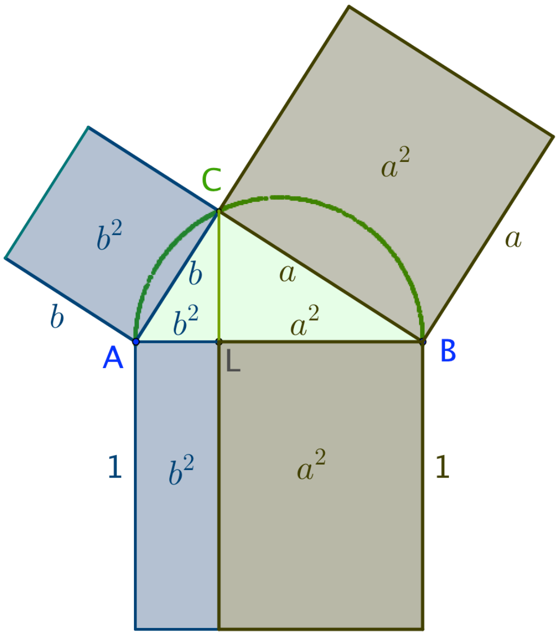
対辺 AB の下に正方形を作るとき，その面積 1 は図のような二つの長方形に分割され，それぞれの面積が a^2 と b^2 である。こうして

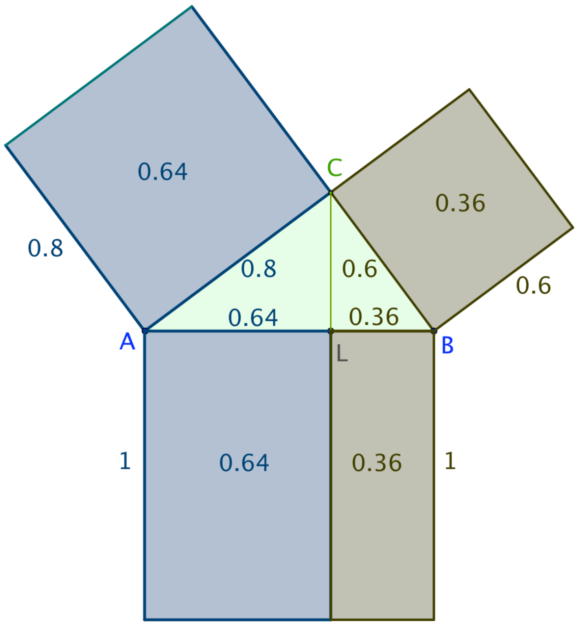
正方形の面積の分割を示す式　　$1 = a^2 + b^2$

ともなる。さらに，a^2 と b^2 は直角を挟む辺の上の正方形の面積であることから，

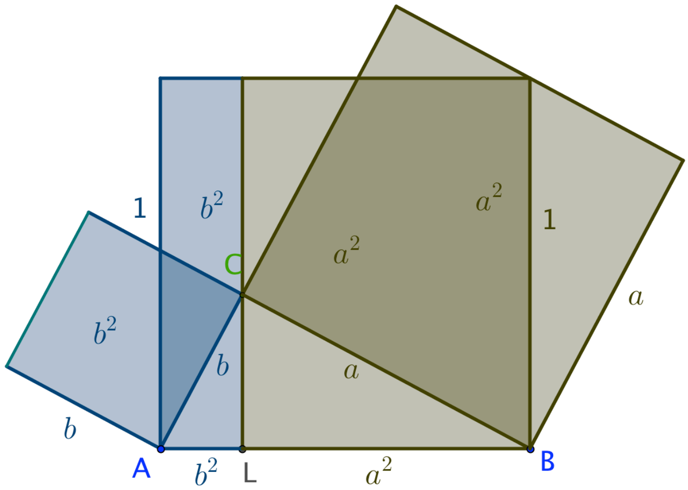
三つの正方形の面積に関する式　　$1 = a^2 + b^2$

ともなる。



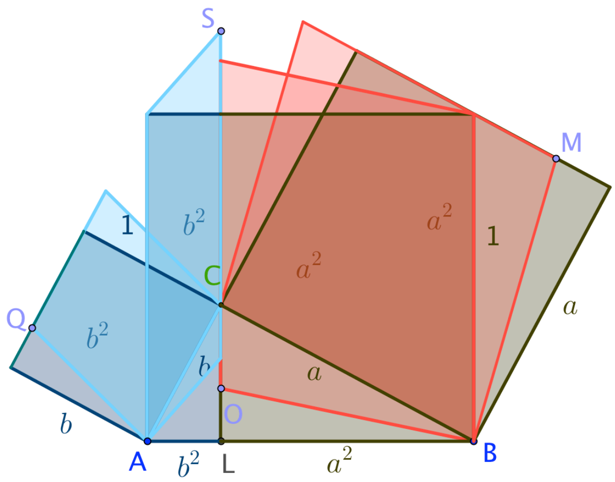


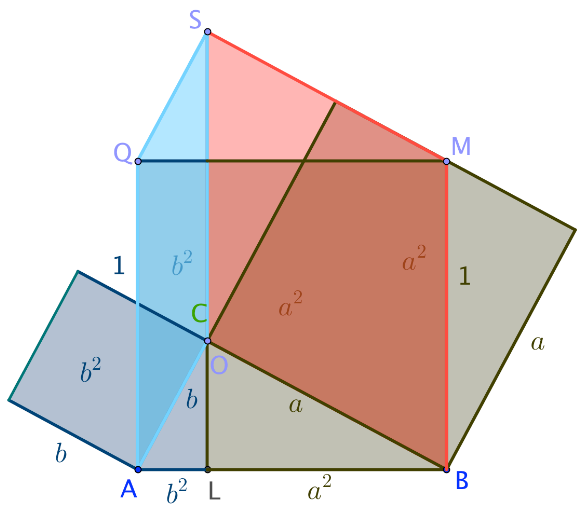
右側の図は，文字でなく、実際の数値で表現している。三辺の比が 5 : 3 : 4 で $a = 0.6, b = 0.8$ のときを描いている。このとき，AB は 36% と 64% の比に分割されている。下の正方形についても同様で，面積は 64% と34% の比に分割されている。



右と左の双方で長方形と正方形の面積が等しいことは，それぞれ a^2 , b^2 であることから自明だが，連続的な等積変形によってさらに確認する。比較するためには両者を”近づけること”が第一歩である。そのために対辺の下の正方形を上に反転させる。実際の作図ではこちらが先きにあり，反転により後で下に移した。

下の左側の図では連続変形の途中である。 それぞれ点 M, O, Q，S をつかんでドラッグしている。 辺の長さ a の方で見ると、正方形では”底辺×高さ”が $a \times a$ を維持する平行四辺形として，長方形は ”底辺×高さ”が $1 \times a^2$ を維持する平行四辺形として変形されている。辺の長さが b の方も同様。右側の図では最終的に共通の平行四辺形に到達しており，それによって面積の一致が確認される。





辺の長さが c,a,b のときは，a,b を $\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}$ に置き換えて議論すればよい。下の第一式の ”1 の分割”の比率で c は分割される。最後に，c を a,b から求める公式がでる。

$$1=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2,\quad c=\left(\frac{a}{c}\right)^2 c+\left(\frac{b}{c}\right)^2 c,\quad c^2=a^2+b^2,\quad c=\sqrt{a^2+b^2}$$