b2012年1月9日　　小島 順

# カードゲームによる足し算と引き算

## ― 階段の上昇/下降を例に ―

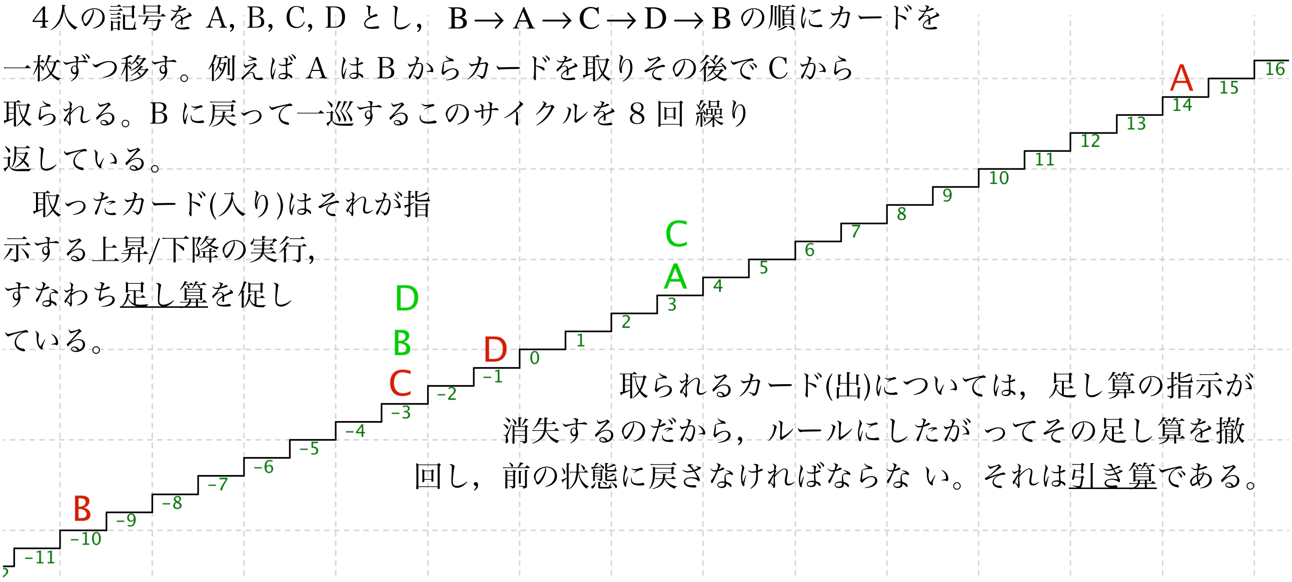
“点と矢線”という枠組みの例として，階段の高さを点，階段の上昇/下降を矢線とみる。昇降の矢線は正負の数で代表される。引くことは足すことの取り消しである。点に矢線を足すことが矢線に沿う前進ならば，点から矢線を引くことは矢線に沿う後退となる。

–5 から 5 までの数のカードを 2 枚ずつ，計 22 枚のカードを使う 4 人 によるゲームを以下に記述する。カードの数字は「それを矢線として足す（その階数だけ移動する）」という指示である。ゲームのルールはそのカードの指示を実行することである。

4人の記号を A, B, C, D とし，B → A → C → D → B の順にカードを一枚ずつ移す。例えば A は B からカードを取りその後で C から取られる。B に戻って一巡するこのサイクルを 8 回 繰り返している。

取ったカード(入り)はそれが指示する上昇/下降の実行，すなわち足し算を促している。

取られるカード(出)については，足し算の指示が消失するのだから，ルールにしたがってその足し算を撤回し，前の状態に戻さなければならない。それは引き算である。




配られたカード（5 枚 か 6 枚）に書かれた指示に従って 0 段（ground) から（足し算だけにより）上昇/下降し，ゲーム開始時には A と C は 3 段, B とD は –3 段 にいた（緑色）。 8 回 のサイクルを終えた時点で，A は14 段，B は –10 段，C は –3 段，D は –1 段 にいる（赤色）。

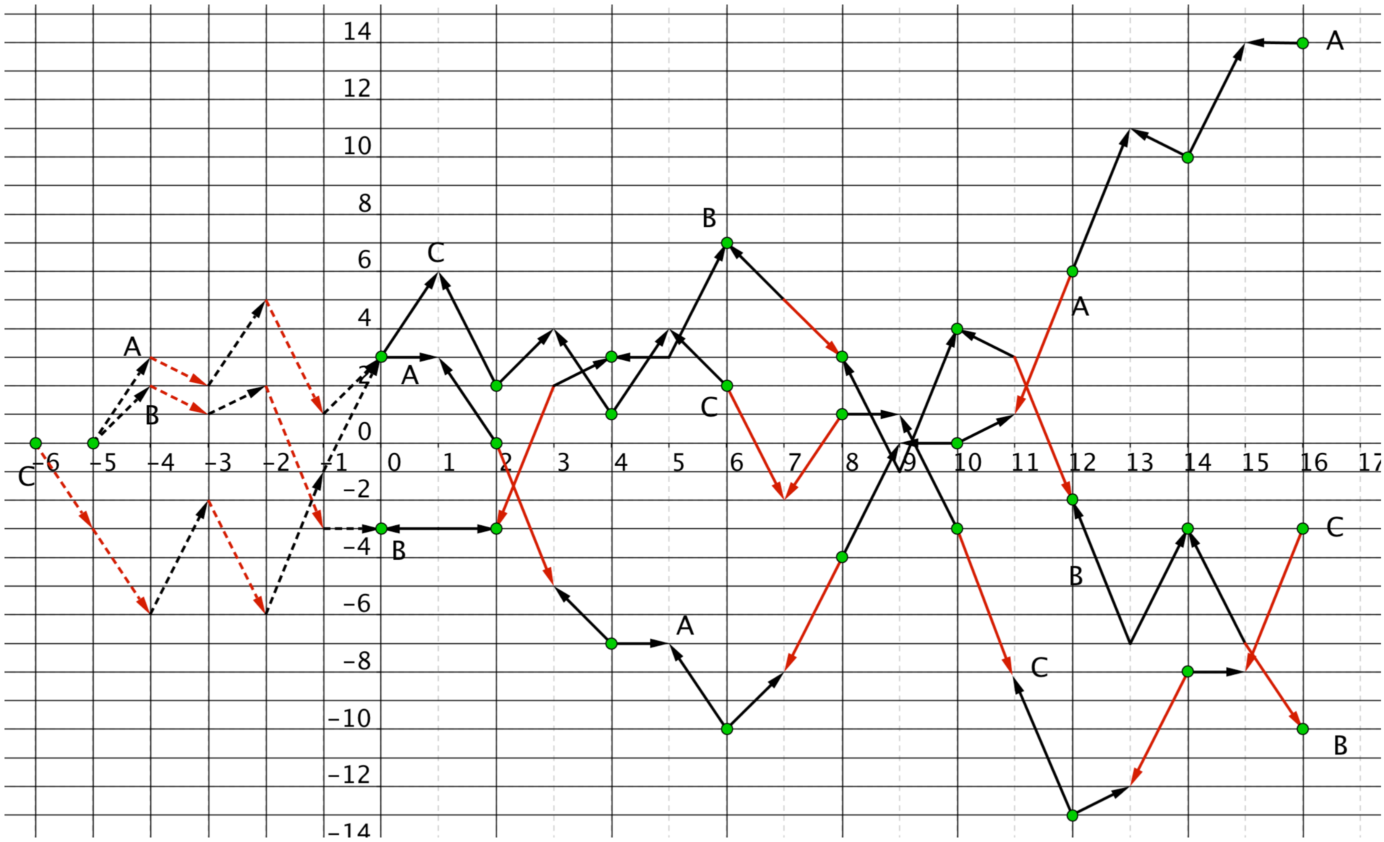
次ページの図で縦軸の数字は段の高さを示す。 横軸の数字は各人ごとに，ゲームのプロセスに関する時点を示す。

A にとっての 4 回目のサイクル において，時点 6 と 7 の間に上昇 2 の入（足し算）がある。時点 7 と 8 の間に下降 –4 の出（引き算）がある。これは 時点 –2 と–1 の間の下降 –4 をキャンセル（なかったことに）している。

C にとっての 4 回目 のサイクルにおいて，時点 6 と 7 の間に下降 –4 の入（足し算）がある。これは A の上記の下降 –4 の出（引き算）に対応している。

B はただ一人，出が先で入が後である。 4 回目のサイクルの冒頭において，B の時点 6 と 7 の間での上昇 2 の出（引き算）がある。 A の上記の上昇 2 の入り（足し算）と対応している。

カードが指示する足し算は矢線の始点から前進して終点（矢印のある方）に向かうことである。指示の取り消しすなわち引き算は矢線の終点（矢印のある方）から逆行して始点に向かうことである。 このゲームでは，実在するカードが引かれるのだから，引き算は足し算実行の跡が残る中でその効果を取り消している。そこにこのゲームでの引き算の特徴がある。




階段の上昇下降を表す折れ線グラフを矢線の連結で作ったことになる。取られるカードは矢線の終点（矢印のある方）で連結していることに注意を。

以下にゲームの記録表を掲げる。位置と書いたのは各サイクルを終えたときの段の高さである。右端の計という列で入と出が同じで差が 0 であるのは，”カードの保存則”の当然の帰結だが，エラーのチェックに役立つ。

| 人名 | A | | | | C | | | | D | | | | B | | | | 計 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 持ちカード | | | | 3,3,2,-1,-4 | | | | 5,4,4,-3,-3,-4 | | | | 5,1,0,-2,-2,-5 | | | | 2,1,0,-1,-5 | | | |
| 開始時位置 | | | | 3 | | | | 3 | | | | -3 | | | | -3 | | | |
| | 入 | 出 | 差 | 位置 | 入 | 出 | 差 | 位置 | 入 | 出 | 差 | 位置 | 入 | 出 | 差 | 位置 | 入 | 出 | 差 |
| 1回 | 0 | 3 | -3 | 0 | 3 | 4 | -1 | 2 | 4 | 0 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | -3 | 7 | 7 | 0 |
| 2回 | -5 | 2 | -7 | -7 | 2 | 3 | -1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | -5 | 6 | 3 | 1 | 1 | 0 |
| 3回 | 0 | 3 | -3 | -10 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 4 | -2 | 1 | 4 | 0 | 4 | 7 | 9 | 9 | 0 |
| 4回 | 2 | -4 | 6 | -4 | -4 | -3 | -1 | 1 | -3 | -2 | -1 | 0 | -2 | 2 | -4 | 3 | -7 | -7 | 0 |
| 5回 | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | -4 | -3 | 4 | 5 | -1 | -1 | 5 | 4 | 1 | 4 | 13 | 13 | 0 |
| 6回 | 1 | -5 | 6 | 6 | -5 | 5 | -10 | -13 | 5 | -5 | 10 | 9 | -5 | 1 | -6 | -2 | -4 | -4 | 0 |
| 7回 | 5 | 1 | 4 | 10 | 1 | -4 | 5 | -8 | -4 | 4 | -8 | 1 | 4 | 5 | -1 | -3 | 6 | 6 | 0 |
| 8回 | 4 | 0 | 4 | 14 | 0 | -5 | 5 | -3 | -5 | -3 | -2 | -1 | -3 | 4 | -7 | -10 | -4 | -4 | 0 |
| 計 | 11 | 0 | 11 | | 0 | 6 | -6 | | 6 | 4 | 2 | | 4 | 11 | -7 | | 21 | 21 | 0 |
| 最後の位置 | | | | 14 | | | | -3 | | | | -1 | | | | -10 | | | |
| 持ちカード | | | | 5,4,4,2,-1 | | | | 3,1,0,0,-3,-4 | | | | 5,3,2.-2.-4,-5 | | | | 1.-1.-2,-3,-5 | | | |

正の数は給付、負の数は拠出の指示書と解釈する。5 は 5 万円の給付を保証し，–3 は 3 万円の拠出を義務づける。5 の出は 5 万円の受給権の取り消し，–3 の出は 3 万円の拠出義務の取り消しである。折れ線グラフをこの解釈で読み直そう。決済後には A が 14 万円 の給付を受け，C, D, B がそれぞれ 3 万円, 1 万円, 10 万円 拠出している（決済前は債権/債務の形で存在）。

このキャッシュの場合は、その増加減少は，階段の上昇下降とは様子が違い，キャッシュの外からの入りと外への出により発生している。「キャッシュの入りと出の指示書であるカードの入りと出」と「キャッシュ自体の入りと出」の間で混乱が起こらないようにしよう。これは参加者間のキャッシュの移動のゼロサムゲームに過ぎず，実態はきわめて単純である。

このように，正負の数の加法・減法の導入（入門）については，階段の昇降，温度変化，所有キャッシュの増減のような，一つの量の変動，一本の直線の上の向きをもつ変動で行うのがよい，と私は思う。

一方，遠山啓エッセンス 4 の pp. 90-93 「生徒におもねるのはすばらしいことだ」では，変位などの「数学でいうベクトル」を使うことに反対し，「スカラー的な意味付けができる」財産, 借金を選んだ、と言っている。そこでは、（私が重視する）「向きをもつ変化量に着目すること」，「一つの量に考察が留まること」が否定されている。

「数学でいうベクトル」では引き算の意味が小学校以来の「引く」とは異なる，と遠山氏は考えているが，実際は，適切な解釈のもとで，小学校の「引く」はそっくり継承されている。

経済活動は基本的に交換である。借金ではキャッシュの入手と引き換えに借用証を相手に渡し，相手は請求権を手にする。「財産と借金」ゲームは正常な経済活動とは関係がなくて，請求書（？）が単独に「付け回し」される。

参加者 D については，前ページの変動のグラフから除かれている。それを補充した完全なグラフを以下に追加する。多少ゴチャゴチャするが，一つのサイクルの中でのカードの移動が何をもたらすかが一望できる。