2014年8月6日

小島 順

# 掛け算の順序について II

## ― 連続量の場合 ―

「掛け算の順序について I ―離散量からはじめる―」の続きとして，連続量の場合について議論する。実は，基本的な論点はすべて，すでに離散量を中心としたIで出ている，と感じている。ここでは速度と濃度の計算を例として，Iの論点をチェックしていくことにする。

## 1 時間，速度，距離をめぐる３つの計算

### 1.0 速度と時間が定める距離

速度 4km/h の等速運動で時間 6h (6 時間）が経過するときの移動距離を 4km/h×6h と積の形で書く。まず二つのデータ 4km/h と6h で距離が決まるという大前提がある。次に，積で書くときは二つの変量にそれぞれ比例すること、すなわち複比例することが前提となっている。

移動距離は 速度が 4km/h ならば 1km/h のときの4倍になり，時間が 6h ならば 1h のときの 6倍になることを我々は知っていて，その上でこう書いているのである。積（掛け算）と複比例関数は同義語である。

1km/h × 1h = 1km だから この場合の距離はその (4 × 6) 倍で 24km となる。

$$4\,\mathrm{km/h}\times 6\,\mathrm{h} = (1\,\mathrm{km/h}\times 1\,\mathrm{h})\times(4\times 6) = 1\,\mathrm{km}\times 24 = 24\,\mathrm{km}$$

この場合 4km/h と 6h の順序はどうでもよい。なぜならば，このような単位付きの量表示のときはそれぞれの項の意味は明白であるから，項の順序（語順)を表現の手段として活用する必要がないからである[注1]。「6 時間を速度 4km/h で歩く時・・・」と話し始めたならば 6h×4km/h と書いたであろう。

「二つの量 4km/h と 6h は異質であるから 順序交換はできない。つまり

4km/h×6h = 6h×4km/h という交換法則は成り立たない」

という不思議な主張をする人がいる。本当は，異質であるからこそ，それを見ただけで何であるかが分かるので，表記の順序に頼る必要が全くなく，したがって，順序を変えても混乱が生じる

---

注1 ドイツ語やロシア語のような，屈折語（inflectional language）の特徴を維持する言語では，語形変化を生かせるから語順にこだわる必要が少ない。しかし，英語は崩壊した屈折語であって殆ど孤立語であるから，我々がよく知っているように，語順に強く頼らざるを得ない。日本語は「語幹に語尾が付着する」膠着語（agglutinative language）であり（膠着という日本語は「容易には離れない」を意味するので不適切である。語尾は自由に，簡単に取り外し取り付けができる），語順の制約は極めて少ない。数値に単位を付けること（数学的には単位に数値が付くのだが）も同様に，数式における順序から我々を解放する。

余地がないのである。（二つから決まるという）もともと書き順に無関係な概念だから，書き順を交換できるかどうかという議論は最初から意味がない。何よりも，このような表記法の問題は数学の内容としての交換法則とは何の関係もない。

しかし（順序と無関係でも）並べて書く以上は，どちらかを先にせざるを得ないので，心の中で「本当は順不同」と思いながら適当に順序を付けている。

「掛け算の順序について I」で詳述したように，4×6（4 が 6つ）と6×4（6 が 4つ）は 算数の出発点においては「違うもの」で区別が必要であった。その区別は (単位が付かないと同じ外見の数であるがゆえに）順序に頼る他なかった。単位付きの場合は事情が全く違う。単位の問題を無視して「掛け算の順序」を議論するのは完全に不毛である。

## 1.1 速度を線型作用素として

### 1.1.0　比例という思考枠組み

複比例は二つの変量のそれぞれに比例することだから，この概念を把握するには，まず比例を把握しなければならない。しかし、比例の感覚は殆ど生得的（innate）である。比例は 人間の脳に備わる思考の枠組み であり，それは進化の過程で獲得され世界を認識する道具となった。

人間は，成長の過程で正常な環境に置かれ適切な経験を積む限り，だれもが自らに潜在するこの思考枠組みを起動させることができる。この innate な（生まれながらの、自然な）倍と比例の感覚は，二次的な，文化の一部としての数学的概念に引き継がれる。初等教育の課題は，第一に生得的な比例感覚の発現を支援することであり、第二にそれを数学概念へ引き上げ確立することである。

しかし現実には支援でなく逆にそれを妨害するような「教育」の働きがある。古い「認識発達段階説」がそのまま影響力を保ち，子供の能力の極端な過小評価がある[注2]。なによりも「教える側」が数学を理解していない。量の掛け算と比例作用素についての正しい理解がない[注3]。

変量の一つを固定した上でのもう一つの変量についての比例として掛け算は丁寧に導入されるべきである。固定された定量（例えば速度 4km/h ）は比例の作用素（線型作用素）としてもう一方の変動する量（この場合は時間）に作用する。“6h と 4km/h の積” でなく “6h に 4km/h が作用” という意識を表現するためには書き順が有効な手段となる。これ以後，前項 1.0 の宣言から

---

注2 「“4倍” は操作だから目に見えない」と，小学校低学年から排除するような態度がある。「掛け算の順序について I」で強調したように，本当は，“4つ重ねる” ような操作ほどはっきり目に見えて，これほど子どもに分かりやすいことはないのに！

念のために：この論考（article）自体は子供ではなくて大人（教師）にむけた発言である。ここでの記述は一種の “メタ算数” であり，大人も時々はやった方がよい内省的考察である。「こんな言葉や言い方は子供には無理」という教師からの反応が多いが，そこには思い違いがある。

“比例”という言葉が使われるかどうかと無関係に，二つの量の積の出発点において“比例”は支配原理である。「比例は6年」という文科省の教科の配列に教師の頭脳が従属してしまい，低学年での掛け算を支配する比例構造が全く見えなくなっている現状は嘆かわしい。

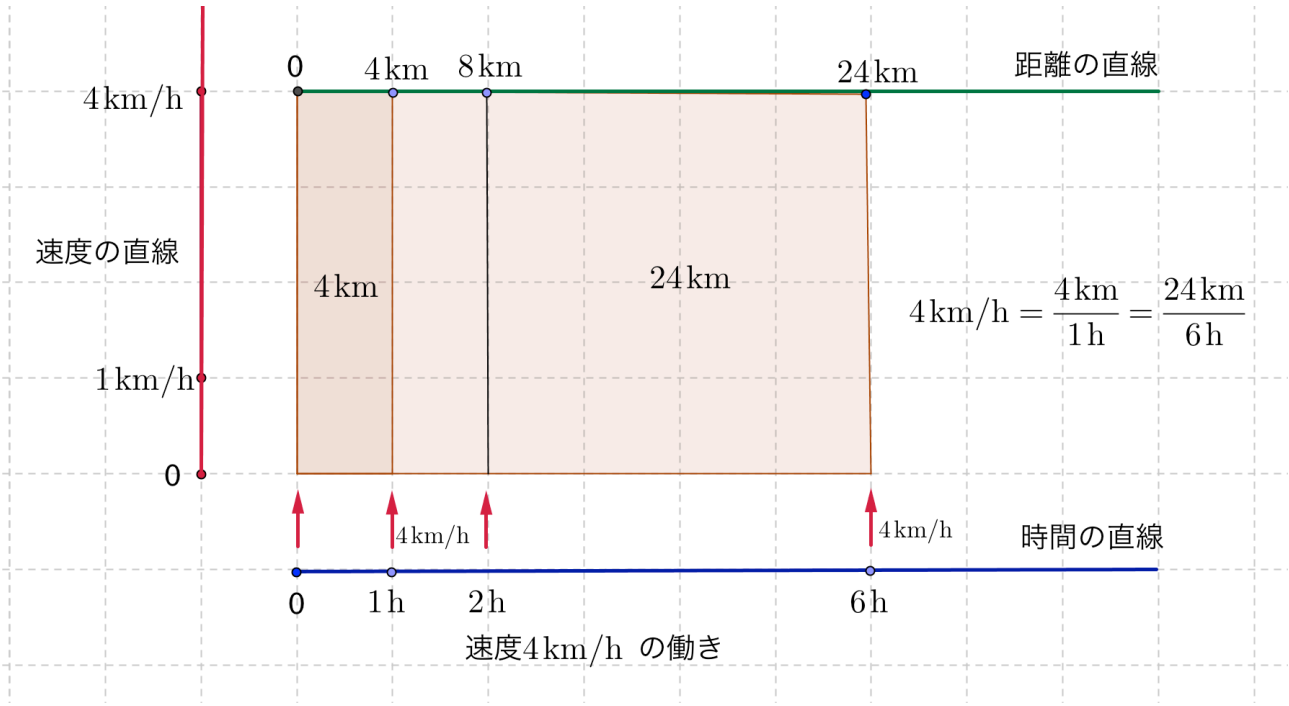
注3 必要ならば，その具体的な実例を提示し，誤りを詳細に指摘する用意がある。

外れて，「作用は右から」という算数ルール（拡張された「算数式」）に従い，6h×4km/h という書き順を選ぶことにする。

下の 1.1.1 から先では速度の方を比例作用素として扱っている。×4km/h として速度が右から作用する。1.2 では時間の方を固定している。×6h のように時間が右から比例作用素として作用する。

### 1.1.1 “面積図”による表現

時間，速度，距離の三つに関わる計算をテーマとする。下の図は GeoGebra 4.0 による。速度 4km/時（以後 時 は h に変えて 4km/h と記す）は赤い縦の速度直線上の点 4km/h として目盛られている。水平な二本の直線がある。青の時間直線と緑の距離直線である。速度の 4km/h は時間に距離を対応させる比例関数（比例作用素）である。上向きの赤の矢線は4本だけ描いたが，それぞれの時間への作用の様子を表現している。




「6h を24km に対応させる」という具体性において 速度 4km/h を表現するのが分数表記の $\frac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{h}}$ である。それはまた $\frac{8\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}}$ などの表現ももつ。これら分数の（個別の具体的な形, **aspect** の）同値類が真の分数の **identity** であり，それが速度 4km/h である。これら個別の分数の形すべてが，4 km/h の具体的表現である。

### 1.1.2　可換図式による表現

下の可換図式において，左の上向き矢線 4 km/h は分数 $\dfrac{4\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}}$，右の上向き矢線 4 km/h は分数 $\dfrac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{h}}$ という具体的表現をもつ。もちろん，この二つの分数は同じ identity をもち，等号で結ばれる。同様に上側の右向き矢線 6 は包含除 $\dfrac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km}}$ として，下側の右向き矢線 6 は包含除 $\dfrac{6\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h}}$ として現れている。

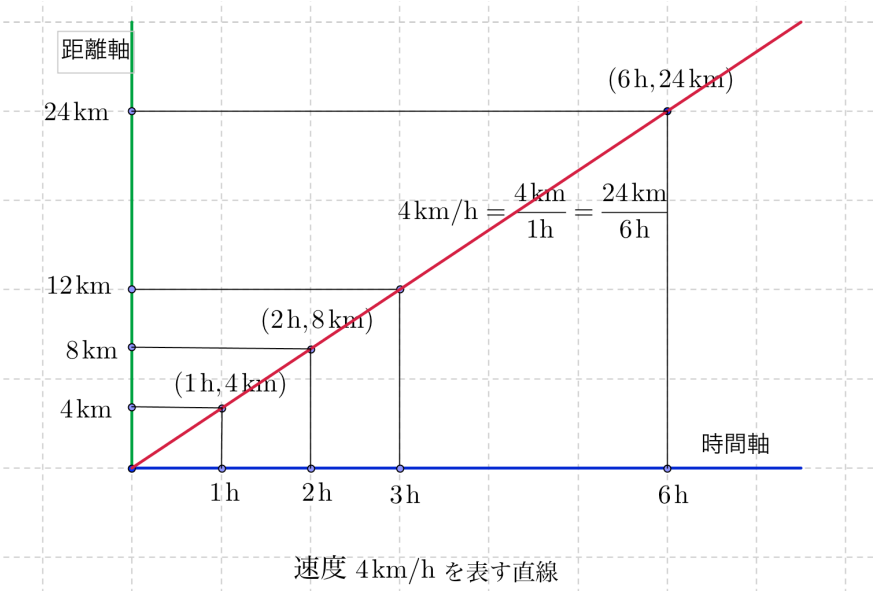
$$\begin{tikzcd}
4\,\mathrm{km} \arrow[r, "6"] & 24\,\mathrm{km} \\
1\,\mathrm{h} \arrow[u, "4\,\mathrm{km/h}"] \arrow[r, "6"] & 6\,\mathrm{h} \arrow[u, "4\,\mathrm{km/h}"']
\end{tikzcd}$$

比例作用素は，「一つの時間、例えば 6 h を　距離 24 km に運ぶ」という一事で完全に決定される。比例作用素の表示法として，矢線による表示と量分数による表示がある。矢線では始点・終点のペアとして，量分数では分母・分子のペアとして，<u>決定するデータ</u> 6 h と 24 km が使われる。<u>二つの表示手段</u>

$$6\,\mathrm{h} \xrightarrow{4\,\mathrm{km/h}} 24\,\mathrm{km/h}, \quad 4\,\mathrm{km/h} = \frac{24\,\mathrm{km/h}}{6\,\mathrm{h}}$$

は同等である。

### 1.1.3　グラフによる表現



上の比例のグラフは，時間の直線を横軸，距離の直線を縦軸とする平面上の，（原点を通る）直線である。この直線が比例作用素 4km/h そのもの，と見ることができる。

直線上の点たとえば $(6\mathrm{h}, 24\mathrm{km})$ という順序対は，外見としての分数 $\frac{24\mathrm{km}}{6\mathrm{h}}$ と同一視される。これら外見としての分数の同値類が本質(identity)としての分数であり，個別の（外見としての）分数たとえば $\frac{24\mathrm{km}}{6\mathrm{h}}$ はそれを”代表”する。（$\frac{4\mathrm{km}}{1\mathrm{h}}$ と $\frac{24\mathrm{km}}{6\mathrm{h}}$ が同値なのは，前者の分母，分子に同じ 6 を掛けて後者になるからである。それは「ベクトルとして $(1\mathrm{h}, 4\mathrm{km}) \times 6 =$（$6\mathrm{h}$，$24\mathrm{km}$）となること」と言い換えられる。）同値類としての速度 4km/h は赤い直線そのものである（正確には負の方向にも伸びた全直線から原点 (0, 0) を除いたものに一致）。

### 1.1.4　３つの直線の必要性

始めの図に戻る。一つ一つの量はそれぞれの直線に目盛られる。時間に対する距離の比としての比例作用素が速度だから，まともな議論のためには（時間の直線とともに）距離の直線が必須である。

一方で距離は，時間と速度の積（product）であるから，それは面積として出現する。この二つの観点を両立させなければならない。時間と速度の積という意味では二次元的，面積的に得られる距離も，その結果としての値は一次元の量であり，直線上に目盛られる。この事実を無視したり敵視したりしてはならない。

GeoGebra による動的なイラスト（ファイル名：時間×速度・数直線.ggb, 距離÷速度数直線.ggb, 距離対時間数直線.ggb）によって，その状況を説明する[注4]。

時間の直線と速度の直線は独立であるが、距離の直線はそうではない。それは自由に伸縮する直線である。速度の指定によって距離直線の高さが決まり，同時に縮尺がきまる。1hの真上に 4km が来るように距離直線の目盛りが調節される[注5]。

### 1.1.5　三つの計算

この状況での三つの計算を列挙する。

---

注4 これは集会でコンピュータを操作しながら話したときの資料としての文言

注5　「数教協」では，距離の直線がないだけでなく，速度の直線も存在しない。それは 4km/h と書きながらも「1時間当り4km 」という速度概念が確立していなくて，“1時間当りの距離” = 4km という距離でしかないからである。さらにこの 4km は面積である！　この二重の錯誤により「数教協」では，速度 4km/h は長方形で表され そのままで 終わる。

$$6\,\mathrm{h}\times 4\,\mathrm{km/h} \;=\; 4\,\mathrm{km}\times 6 \;=\; 24\,\mathrm{km}, \qquad \text{(i)}$$

$$24\,\mathrm{km}\div 4\,\mathrm{km/h} \;=\; 1\mathrm{h}\times\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km}} \;=\; 6\,\mathrm{h}, \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{h}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}\div 6}{1\mathrm{h}} \;=\; 4\,\mathrm{km/h} \qquad \text{(iii)}$$

第一式 (i) は矢線 4 km/h に沿う前進であり，第二式 (ii) は後退である。1h の真上に 4 km が来るように距離直線を調節している。（i）では 6h の真上にある 24 km を見つけ，（ii）では 24 km の真下にある 6h を見つけている。

第三式 (iii) は分母と分子から（それらを始点，終点とする）矢線を構成している。6h の真上に 24 km が来るように距離直線を（伸縮により）調節し，1h の真上にある 4 km を見つけている。二つの図のどちらを眺めても（また，可換図式を見ても），上の計算の意味は明白であろう。

「掛け算の順序 I」に続き，我々はここでも「状況の式」から結果に到達するまでのプロセスを強調する。それは「計算の式」を経由している。

### 1.1.6　計算の詳細バージョン

より詳細にそのプロセスを記述すると以下にまとめたようになる。

速度 4 km/h を代表する一つの分数表示 $\frac{4\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}}$ において前進 “ $\times$ 4km/h ” は分母を分子に運ぶ。後退 “ $\div$ 4 km/h ” は逆に分子を分母に運ぶから，それは 逆向きの矢線に沿う前進 “ $\times\frac{1\mathrm{h}}{4\,\mathrm{km}}$ ” に等しい。分母と分子を入れ替えた分数がこの逆矢線を表現している。(1), (2) という（速度を掛ける，速度で割る）計算に対等な，速度の分数表示のままの変形 (4), (5) を間に挿入しておいた。赤と青の色で対応する式変形を示した。

$$6\mathrm{h}\times 4\mathrm{km/h} \;=\; 6\mathrm{h}\times\frac{4\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} \;=\; 4\,\mathrm{km}\times\frac{6\,\mathrm{h}}{1\mathrm{h}} \;=\; 4\,\mathrm{km}\times 6 \;=\; 24\,\mathrm{km}, \qquad (1)$$

$$24\,\mathrm{km}\div 4\,\mathrm{km/h} \;=\; 24\,\mathrm{km}\times\frac{1\mathrm{h}}{4\,\mathrm{km}} \;=\; 1\mathrm{h}\times\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km}} \;=\; 1\mathrm{h}\times 6 \;=\; 6\mathrm{h}, \qquad (2)$$

$$4\,\mathrm{km/h} \;=\; \frac{4\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} \;=\; \frac{4\,\mathrm{km}\times\frac{6\,\mathrm{h}}{1\mathrm{h}}}{6\,\mathrm{h}} \;=\; \frac{4\,\mathrm{km}\times 6}{6\,\mathrm{h}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{h}} \qquad (4)$$

$$\;=\; \frac{24\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}\times\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km}}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}\times 6} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}}{6\mathrm{h}} \qquad (5)$$

$$\frac{24\,\mathrm{km}}{6\mathrm{h}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}\div\frac{6\mathrm{h}}{1\mathrm{h}}}{1\mathrm{h}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}\div 6}{1\mathrm{h}} \;=\; \frac{4\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} \;=\; 4\,\mathrm{km/h} \qquad (3)$$

(1) と (2) は前進と後退の対比であり， 分数の分母・分子が交換されていることだけが違う。このように詳細 に記述すると，(1) と (2) の計算が本質的に同じことをやっているのに気がつく。どちらにも包含除が現れて，その結果の 6 を掛けている。しかし，(1) の $\frac{6\mathrm{h}}{1\mathrm{h}}$ は trivial で包含除と呼ぶほどでもないから，計算の全体は掛け算と意識される。（2）の計算は逆に掛け算の部分 1h × 6 は計算と呼ぶほどのものでなく，包含除 $\frac{24\mathrm{km}}{4\mathrm{km}}$ が過程全体のカギとして意識される。

× 4km/h と ÷ 4km/h は逆演算であるから，それぞれの第二辺に見るように分母と分子が逆転している。「割ることは分母，分子を入れ替えて掛けること」が，ここでは自明なこととして了解できる。

### 1.1.7　分数は分数として

速度 = $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$ のように速度は本質的に量の分数（量分数）である。単位の km/h からして分数そのものである。もともと分数であるものは分数として扱うのがまともな態度であり，世の中ではそうしている。物理や化学の教科書もそうなっているし，経済学なども量の分数に溢れている。数学教育の中でだけ量の分数が欠落している！

分数として扱うことで，計算の構造がはっきり見えるようになる。式変形の一つ一つについてその意味が明白にたどれる。分数計算は表現が自然で，意味と形式がもともと合致している。したがって，意味を考えることなく機械的に処理することこともやさしい。

### 1.1.8　自然言語と式

式 (i) において，速度 4km/h は 「1h（1 時間）当り 4km 走る」という，文（sentence）あるいは名詞節（noun clause）であり、述語を含んでいる。「1h 当り 4km 」のように明示的には述語がなくても，それは隠れているだけである。一方，「「1h 当りの距離」は述語を持たない名詞句 (noun phrase）であり，今の状況でそれは 4km に等しく， 4km/h ではない。述語を含む名詞節の 「“1h当り4km 走る” = 4km/h 」と，単なる名詞句である 「“1h当りの距離” = 4km 」の二者を明確に区別しなければならない。

等式連鎖 (i) の左辺 は

「時間 6h に速度 “1h 当り4km ” = 4km/h が作用することで定まる距離」

を， あらかじめ二つの量の積として “6h × 4km/h ” と宣言した式，つまり状況設定の式である。

これに対して，(ii) の中央の式 4km × 6 は，

「“1h 当りの 距離” すなわち4km の ”6h 分” すなわち 6倍」

として ”4km×6 ” なのである。6時間 分(ぶん）とは × 6 であり，×6h ではない。（ “× 6時間分” もおかしい。）

等式連鎖 (ii) は詳細バージョンの (2) の方で考えよう。最左辺は

「移動距離 24km が速度 4km/h の等速運動の結果であるときの所要時間」

を速度の矢線に沿う後退として ”24km ÷ 4km/h ”と宣言している。 逆向き矢線は ”4km 当り 1h”だから，それは第2辺では

「距離 24km と逆矢線（逆速度） ”4km 当り 1h” から定まる 時間」

と変形されている[注6]。第4辺では

「“4km 当りの時間” すなわち 1h の “24km 分” すなわち $\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km}}$ 倍 ＝ 6 倍」

となる。（2）では 4km が単位の役割をしている。したがって，“24km 分”とは “× 24” ではなくて “× 6” なのである。

等式連鎖 (iii) というよりは (3) は

「6h 当り 24km の速度」

を量分数 $\frac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{h}}$ で表している。分子は第3辺で

「“1h 当りの距離” すなわち 24km ÷ 6 」

に変わり，分母の 1h と合わせて

「“1h 当り 24km ÷ 6 ” という速度」

となる。

分数 $\frac{4\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}}$ において，<u>分子だけ</u> の “1h 当りの距離” すなわ 4km は名詞句であり，<u>分子と分母と合わせた分数</u> の “1h 当りの距離は 4km ” すなわち4km/h は名詞節であることに注意しよう[注7]。

### 1.1.9 掛け算・割り算の順序

表題にも関わらず，これまで演算表記上の語順について触れることが少なかった。今この箇所で採用しているルールは基本的には単純で，「作用素は右から作用する」である。可換図式による表現に即して言えば，4km/h と 6 は，右から “× 4km/h ”, “× 6” として（あるいは，同じく

---

注6 逆速度を “ 1km 当り $\frac{1}{4}$h ” すなわち $\frac{1}{4}$ h / km とする人が多いが，今の文脈ではそれは不適切であり得るところは何一つない。4 km を単位とする 1h / 4km （“4 km 当り 1時間”）とすべきである。

注7 「花 4本 に水 3ℓ ずつを掛ける」という状況を考えよう（高橋誠 p.32)。このときの数式は

$$4\text{本} \times 3\ell/\text{本} = 3\ell \times 4 = 12\ell$$

である。「“水を 3ℓ ずつ掛ける” 作業が第1辺における右からの “ ×3ℓ/本 ” に対応する。比例作用素 3ℓ/本 が作用する様を，記号 × を使って “×3ℓ/本 ” と記し，”3ℓ/本 を掛ける” と唱えるのだが， この場合は，生活の中の動作・作業としての “水を 3ℓ ずつ掛ける” と言葉 “掛ける” が一致している。その計算は（比例の原理により）“3ℓ に 4 が掛かる” 第2辺の 3ℓ×4 となる。「掛ける」という日本語については「掛け算の順序を考える I」の 1.1.2 で詳しく議論した。

右から“÷ 4km/h”，“÷ 6”として）作用する。一方で、単位を修飾する数は, 4km/h や24km や 6h における 4, 24, 6 のように左から係っている。右からの掛け算が 記号 × を伴い 計算を促している のに対して，左からの掛け算は × を伴わず，単位に 形容詞的に 係っている（それは 数の計算のレベルでは 4×1, 24×1, 6×1 のような trivial な計算であり，普通は掛け算と意識されない。このようなときには ”乗数が左” の原理が働いている[注8]）。この 二つの原理の複合 が「算数式」あるいは「拡張された算数方式」なのである。

「掛け算の順序 I」は「離散量の場合」としていたが，基本的な問題は連続量の場合と共通であり，すでに議論は尽くされている。だからもう順序にはあまり触れずにすむのである。

数字だけを取り出せば，(i) や (1) で 6 × 4 から 4 × 6 に，計算のプロセスの中で交換されている。「速度 4km/h の線型性（比例の作用）」 という一番大事な原理が この交換を通じて表現されている のであり（その様子は可換図式の形ではっきり見ることができる），ポジティブに受け止めるべきことである。

このように，数の計算のレベルだけで 「6 × 4 か 4 × 6 か」と議論するのは不毛である。単位を含む表現は格段に豊かな情報をもっている。それによってはじめて、量を扱うときの数学のアイディアを的確に述べることができる。

### 1.1.10 二つの 割り算の書き分け

この「掛け算の順序について II」においては，I のとき以上に，割り算を掛け算と一体のものとして扱おうとしている。(1) と (2) の対比に見るように，割り算は“÷ 4km/h”と（当然ながら）右からの作用であるから，掛け算もこの文脈では当然，右からの掛け算“× 4km/h”として揃えるべきだ，ということになる。

割り算には（この文脈のなかで）２種類の割り算 がある。一つは (2) の矢線に沿う後退としての（× 4km/h の逆演算としての） ÷ 4km/h であり，もう一つは (5) の 量分数の形の割り算 で分数 $\frac{24\,\mathrm{km}}{6\mathrm{h}}$ からその同値類としての4km/h という 矢線を作る 演算である。この二つの割り算を， I に続けて II でも，矢線の逆行は割り算記号 ÷ で、矢線の構成は分数で表す方針を採用している。

”掛け算の順序”と”割り算の二つの表記法” は 「数学上のアイディアを言い表すために数式上の表記の違いを活用する」という意味で，同一の発想である。

割り算 (2) は“ 掛け算の逆” という意味で等分除的といえるが，その第3辺に現れるのは 包含除 $\frac{24\mathrm{km}}{4\mathrm{km}}$ である。割り算 (3) は 量の比という意味で包含除的といえるが，その第3辺に現れるのは 24km ÷ 6 という等分除である。

## 1.2 作用素と変量：立場の取り替え

---

注8 6h は“1h が 6つ” であるのに 乗数の 6 が左に来ている。1h を 1 で置き換えると 6h は 6 × 1 となる。しかしこの意味は“6 が 1つ” ではなくて“1 が 6つ” であり，「乗数が右」の原理の逆である。この二つの原理の混在が「算数式」である。

### 1.2.1 量の積

すでに 1.0 で述べたことの繰り返しになるが，$6\mathrm{h}\times 4\mathrm{km/h}$ のような　時間 × 速度　の形の式は積（product）と呼ばれる。その定義は「時間と速度が定める距離」のことである。距離は時間に比例し速度に比例する，つまり，二変量の時間と速度に複比例する，積という言葉はほぼ複比例関数の同義語として使われている。

時間が $t\mathrm{h}$ で速度が $v\mathrm{km/h}$ , 距離が $x\mathrm{km}$ のとき，$t\mathrm{h}\times v\mathrm{km/h} = (\mathrm{v}\times t)\mathrm{km} = vt\mathrm{km}$ だから 変量を単位について表現する変数 $t,v,x$ の間には $x=v\times t=vt$ が成り立つ。このことが積という言葉の量への転用を正当化する。$t\mathrm{h}\times c\mathrm{km/h} = c\mathrm{km}\times t = ct\mathrm{km}$

1.1 においては，我々は一つの等速運動を想定した。 速度を変数 $v$ でなく定数 $c$ を使って $c$ km/h と書く場合である。 時間と距離という二つのデータから，時間から距離への比例作用素（時間に対する距離の一定の比）として，速度 $c\mathrm{km/h}$ は計算された（$6\mathrm{h}$ と $4\mathrm{km/h}$ から 量分数として $\dfrac{24\mathrm{km}}{6\mathrm{h}} = \dfrac{4\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = 4\mathrm{km/h}$ を求めたのがその実例である）。ひとたび速度が確定すれば，それは

$$c\mathrm{km/h} : t\mathrm{h} \mapsto c\mathrm{km}\times t = (c\times t)\mathrm{km} = ct\mathrm{km}$$

のように，時間 $t\mathrm{h}$ を入力とし距離 $ct\mathrm{km}$ を出力とする写像（関数）として機能する（作用する）。その作用する様を，「作用の対象を左側に，作用は右から」の原則に従って $t\mathrm{h}\times c\mathrm{km/h}$ と書いたのであった[注9]。こうして

$$v\mathrm{km/h} \mapsto a\mathrm{h}\times v\mathrm{km/h} = (a\times v)\mathrm{km}$$

となった。

### 1.2.2 時間を作用素，速度を変量として

今度は，時間を一定値 $a\mathrm{h}$ に固定し，速度 $v\mathrm{km/h}$ を変量とみる。このとき，時間 $a\mathrm{h}$ は変量である速度 $v\mathrm{km/h}$ に

$$a\mathrm{h}\times v\mathrm{km/h} = \mathrm{va}\,\mathrm{km}$$

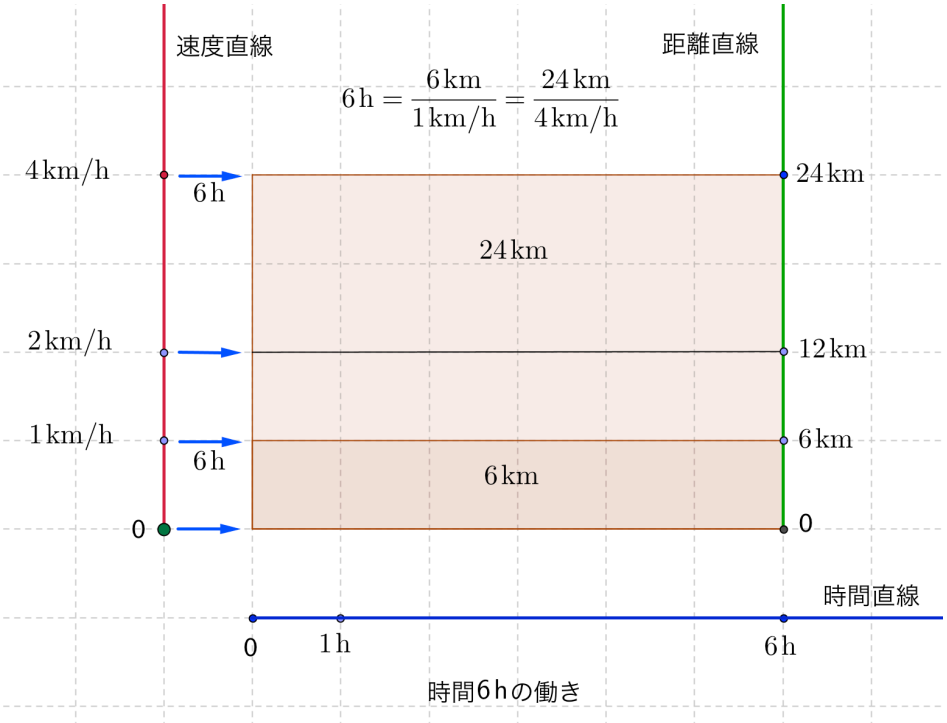
として作用する。

ここで使った $a\mathrm{h}\times v\mathrm{km/h}$ はこれまでの延長で，$a\mathrm{h}$ に $v\mathrm{km/h}$ が作用する形である。時間は<u>速度の作用を受ける</u>という正にそのことによって<u>速度に作用する</u>。この 時間 $a\mathrm{h}$ の作用は $a\mathrm{h}\times(\,)$ と

---

注9 変数だけの式は $x=ct$ となる。このような変数の式について，それが何を示しているか，単位を補うとすればどうなるか，背後にある量の式が問題とされることがある。$c\mathrm{km}\times t$ であるかも知れないし，$c\mathrm{km/h}\times t\mathrm{h}$ であるかも知れない。前者であれば「算数式」であり“$c$ の $t$ 倍”である。しかしこれを後者のように解釈すると，我々が今採用している（算数式）語順 $t\mathrm{h}\times c\mathrm{km/h}$ とは反対になっている。

書くと分かりやすい。( ) は変量 $v$km/h が入力として投げ込まれるスロットである 。時間 $a$h の




作用 $a$h×( ) は “速度 1km/h 当りの距離が $a$km ” であるから量分数として表現すると

となる。

速度 $c$km/h が線型作用素（比例作用素）であるのは等速運動を前提としているからだ（一般の運動では瞬間ごとにそれに接する等速運動を考えている）。これに対して，時間の作用が比例作用である根拠はより単純で $v$km/h という速度の定義そのもの（ “1h で走る距離が， 1km/h の場合の 1km の $v$ 倍” という速度）にもとづく。

時間 $a$h は作用の対象から作用の主体へと立場が変化した。そのことを明示する手段として書き順が活用される。1.0 では，時間と速度という二つの量の積は順不同の概念であり，順序はどうでもいい，という出発をしたが，その直後の 1.1 からは「作用は右から」というルールに従った。

その延長で考えると，時間 $a$h を作用素と扱うときは，順序を逆転させて $v$km/h×$a$h と書けばよい。もともと書き順はどうでもよいとしたから，この逆転自体には抵抗はない。そして $a$h が作用素として扱われていることを示すために語順を生かしたのである。この語順活用のおかげで $a$h×( ) のような新しい記号を導入する必要がなくなる[注10]。

三つの計算は，今度は以下のようになる。

---

注10 「アメ数の計算の諸側面（2）」では，さらに $\underline{a\mathrm{h}} := a\mathrm{h}\times(\ )$ とおいて，新しい記号 $\underline{a\mathrm{h}}$ を作り，$v\mathrm{km/h}\times\underline{a\mathrm{h}} := a\mathrm{h}\times v\mathrm{km/h}$ と書いている。本稿では，単に時間 $a$h を右側に移すだけで，それが作用ととて扱われることを示すことにする。

$$v\,\mathrm{km/h} \times 6\,\mathrm{h} \;=\; 6\,\mathrm{km} \times v \;=\; 6v\,\mathrm{km}, \qquad \text{(i)}$$

$$w\,\mathrm{km} \div 6\,\mathrm{h} \;=\; 1\mathrm{km/h} \times \frac{w\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{km}} \;=\; \frac{w}{6}\mathrm{km/h}, \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km} \div 4}{1\mathrm{km/h}} \;=\; 6\,\mathrm{h} \qquad \text{(iii)}$$

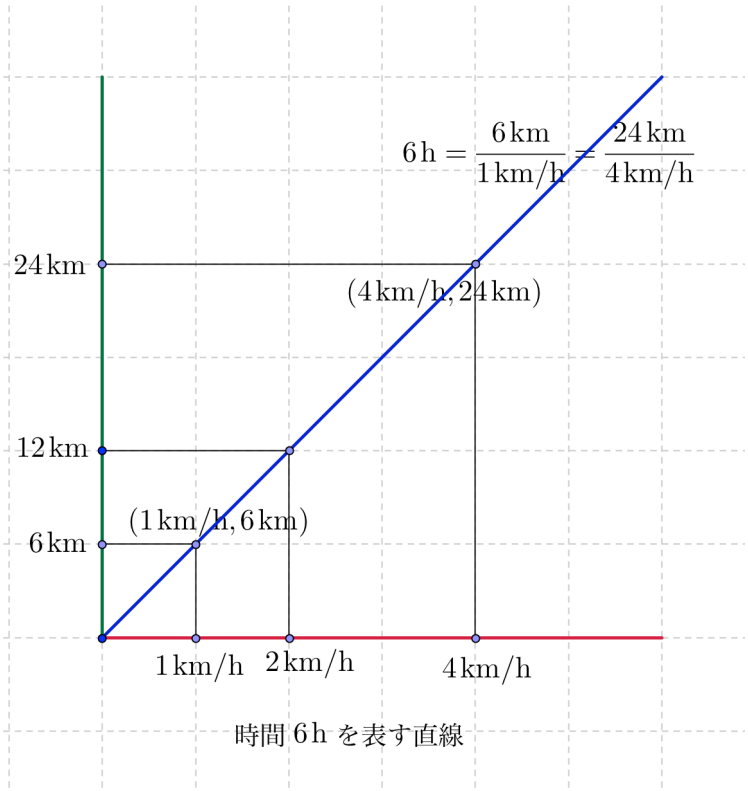
対応する図も新しくなっている。

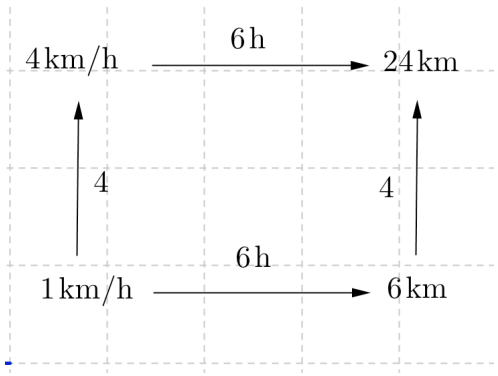
ここでは，緑の距離直線の置き方が変更されている。水平から垂直になり，今は（時間直線と向き合うのではなくて）速度直線と向き合っている。青の時間直線の点 6h は4本の青の矢線として実現されている。矢線の一つ（一番上）は，その場所にあることで， 4km/h を 24km に対応させる働きをしている。つまり分数 $\frac{24\mathrm{km}}{4\mathrm{km/h}}$ の具体形で，そこでは存在している。

距離直線は適切な位置に，適切な縮尺のもとに置かれなければならない。今は，時間直線の点 6h の上に距離直線が置かれている。そして速度直線上の点 1km/h の真横に 6km が来るように距離直線が（その伸縮により）調節されている。

### 1.2.3 グラフと可換図式

さらに，グラフと可換図式も追加する。






グラフの直線の各点は外形（appearance) あるいは存在形態（aspect）としての分数, たとえば $\dfrac{12\mathrm{km}}{2\mathrm{km/h}}$ などであり，その同値類は外延的に（すなわち集合として）捉えるときは青い直線が時間 6h という本質（identity）を表現する。

### 1.2.3　計算過程の詳細バージョン

$$v\mathrm{km/h}\times 6\mathrm{h} \;=\; v\mathrm{km/h}\times\frac{6\mathrm{km}}{1\mathrm{km/h}} \;=\; 6\mathrm{km}\times\frac{v\mathrm{km/h}}{1\mathrm{km/h}} \;=\; 6\mathrm{km}\times v \;=\; 6v\mathrm{km}, \quad (1)$$

$$w\mathrm{km}\div 6\mathrm{h} \;=\; w\mathrm{km}\times\frac{1\mathrm{km/h}}{6\mathrm{km}} \;=\; 1\mathrm{km/h}\times\frac{w\mathrm{km}}{6\mathrm{km}} \;=\; 1\mathrm{km/h}\times\frac{w}{6} \;=\; \frac{w}{6}\mathrm{km/h}, \quad (2)$$

$$6\mathrm{h} \;=\; \frac{6\mathrm{km}}{1\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{6\mathrm{km}\times\frac{v\mathrm{km/h}}{1\mathrm{km/h}}}{v\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{6\mathrm{km}\times v}{v\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{6v\mathrm{km}}{v\mathrm{km/h}}, \quad (4)$$

$$= \frac{w\mathrm{km}}{1\mathrm{km/h}\times\frac{w\mathrm{km}}{6\mathrm{km}}} \;=\; \frac{w\mathrm{km}}{1\mathrm{km/h}\times\frac{w}{6}} \;=\; \frac{w\mathrm{km}}{\frac{w}{6}\mathrm{km/h}}, \quad (5)$$

$$\frac{24\mathrm{km}}{4\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{24\mathrm{km}\div\frac{4\mathrm{km/h}}{1\mathrm{km/h}}}{1\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{24\mathrm{km}\div 4}{1\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{6\mathrm{km}}{1\mathrm{km/h}} \;=\; 6\,\mathrm{h} \quad (3)$$

（1）は時間 6h　という矢線に沿う前進，(2) は 6h　に沿う後退である。 (4) と (5) は 時間 6h を分数として処理したもので，分子の動き (4) が (1) そのものであり，分母の動き (5) が (2) そのものである。

(1), (2) は本質的に同じ構造であり，分母、分子を入れ替えだけである。しかし，実状としては
(1) は第4辺の掛け算が，　(2) は第3辺の包含除が意識される。
(3) では分子の等分除が意識される。

### 1.2.4 自然言語での表現

（1）「速度 4km/h に時間 6h （すなわち，”1km/h 当り 6km ”） が作用[注11] した結果の移動距離」が「4km/h×6h 」である。

それは

「“1km/h 当りの移動距離” すなわち 6km の “4km/h 分” すなわち 4倍」

で「6km ×4」となる。

(2) 「移動距離 24km が 経過時間 6h (すなわち，”1km/h 当り 6km ”) で達成されたときの速度」が 「24km ÷ 6h 」である。それは矢線 6h の逆行だから

「 “距離 6km 当りの 速度” すなわち 1km/h の “24km 分” すなわち $\frac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{km}}$ 倍＝ 4倍 」

で 「1km/h × 4 」となる。ここでは 6km を単位としているから，”24km 分”は 24倍でなく4倍である。

(3)　一定の経過時間の等速運動を前提とする。

「速度 4km/h 当りの到達距離が24km 」

であるならば,

「速度 1km/h 当りでは 24km ÷ 4 = 6km 」

で $\frac{6\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/h}}$ となるから，この結果をもたらす一定時間は 6h である。

### 1.2.5　ここまでのまとめの表

| 矢線 | 4 km/h | 6 h |
|---|---|---|
| 矢線を作る | $\frac{24\,\mathrm{km}}{6\mathrm{h}} = \frac{24\mathrm{km} \div 6}{1\mathrm{h}} = \frac{4\,\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = 4\,\mathrm{km/h}$ | $\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km/h}} = \frac{24\,\mathrm{km} \div 4}{1\,\mathrm{km/h}} = \frac{6\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/h}} = 6\mathrm{h}$ |
| 矢線に沿う前進 | $6\mathrm{h} \times 4\mathrm{km/h} = 6\mathrm{h} \times \frac{4\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = 4\mathrm{km} \times 6 = 24\,\mathrm{km}$ | $4\mathrm{km/h} \times 6\mathrm{h} = 4\mathrm{km/h} \times \frac{6\mathrm{km}}{1\mathrm{km/h}} = 6\mathrm{km} \times 4 = 24\mathrm{km}$ |
| 矢線に沿う後退 | $24\mathrm{km} \div 4\mathrm{km/h} = 24\mathrm{km} \times \frac{1\mathrm{h}}{4\mathrm{km}} = 1\mathrm{h} \times 6 = 6\mathrm{h}$ | $24\mathrm{km} \div 6\mathrm{h} = 24\mathrm{km} \times \frac{1\mathrm{km/h}}{6\mathrm{km}} = 1\mathrm{km/h} \times 4 = 4\mathrm{km/h}$ |

**矢線を作る：等分除**　　分母を単位量に変換するときに，分子では等分除が起こっている。

---

注11 6時間という時間を決め，「一斉に出発しこの6時間でどこまで到達できるかを競う」という競技を考えよう。ただしそれぞれの競技者は等速で走ったという単純化をする。それには，この 6時間 の実際の走行の平均速度を使用すればよい。このとき各競技者の走行距離は速度に比例する。速度 $v$km/h の競技者は $6v$km 先に到達している。6時間という 競技時間の設定 がこの比例作用を定めている。

**前進：掛け算**　　倍の演算 が途中で出現する。数値的には 左と右で 6と4 が逆になっている。それぞれが途中で逆転するので，全体では交差している。

**後退：包含除**　4km当り，6 km 当りのように新しい単位に移るので、 ともに包含除が発生している。

以下の議論では，4 km/h を矢線（線型作用素)として扱うのを**標準的**，6 h を矢線として扱うのを**非標準的**と呼んでいる。

## 1.3　計算目標でまとめる

三組とも第一式が速度を比例作用素とする標準的方法，第二式が時間を比例作用素とする非標準的方法である。実際には「非標準的」方法もよく使われている。

### 1.3.1　距離を求める

$$6\,\mathrm{h}\times 4\,\mathrm{km/h} \;=\; 6\,\mathrm{h}\times\frac{4\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} \;=\; 4\,\mathrm{km}\times\frac{6\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h}} \;=\; 4\,\mathrm{km}\times 6 \;=\; 24\,\mathrm{km},$$

$$4\,\mathrm{km/h}\times 6\,\mathrm{h} \;=\; 4\,\mathrm{km/h}\times\frac{6\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/h}} \;=\; 6\,\mathrm{km}\times\frac{4\,\mathrm{km/h}}{1\,\mathrm{km/h}} \;=\; 6\,\mathrm{km}\times 4 \;=\; 24\,\mathrm{km}$$

数式は<u>数学の言語</u>であって，数学上の思考過程を表現するために数式は使われている。

書き順について一定のルールはある。ここで採用しているのは「作用は右から，作用の対象は左側に」という単一のルールである。このルールに沿って数学の思考プロセスを数式で表現するとき，結果として，必然的に順序は変わる。第一式と第二式の意味の違いを表現するのは，出発点の第一辺における項の順序である。その後の計算の構造は完全に同じであることが，並べることで確認できる。

比例の本質は実数倍との順序交換である（1.1.2 と1.2.3 の可換図式はそれを的確に表現している）。したがって「状況の式」から「計算の式」へ移るときに数値のレベルで順序交換が起こるのは当然で，これは第一式，第二式ともに第三辺に移るときに起こっている。

### 1.3.2　時間を求める

$$24\,\mathrm{km}\div 4\,\mathrm{km/h} \;=\; 24\,\mathrm{km}\times\frac{1\,\mathrm{h}}{4\,\mathrm{km}} \;=\; 1\,\mathrm{h}\times\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km}} \;=\; 1\,\mathrm{h}\times 6 \;=\; 6\,\mathrm{h},$$

$$\frac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}\div\dfrac{4\,\mathrm{km/h}}{1\,\mathrm{km/h}}}{1\,\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{24\,\mathrm{km}\div 4}{1\,\mathrm{km/h}} \;=\; \frac{6\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{km/h}} \;=\; 6\,\mathrm{h}$$

第一式は距離から時間へ，速度の矢線に沿う後退としての割り算で，これは標準的計算，第二式は速度に対する距離の比（分数）としての割り算で，これは非標準的計算である。

この二つは際立って対照的であり，第一式はむしろ掛け算である（1.3.1 の第一式の掛け算を逆向きにしただけ）。第二式は量分数として２量の比を求める本格的割り算である。

前者では包含除 “$\dfrac{24\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{km}} = 6$ ” が，後者では等分除 “$24\,\mathrm{km} \div 4 = 6\,\mathrm{km}$ ” が計算としての実体である。

### 1.3.3　速度を求める

$$\frac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{h}} = \frac{24\,\mathrm{km} \div \dfrac{6\,\mathrm{h}}{1\,\mathrm{h}}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{24\,\mathrm{km} \div 6}{1\,\mathrm{h}} = \frac{4\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 4\,\mathrm{km/h},$$

$$24\,\mathrm{km} \div 6\,\mathrm{h} = 24\,\mathrm{km} \times \frac{1\mathrm{km/h}}{6\,\mathrm{km}} = 1\mathrm{km/h} \times \frac{24\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{km}} = 1\mathrm{km/h} \times 4 = 4\,\mathrm{km/h}$$

この二つの式も同様に極めて対照的である。
第一式の標準的方法は 時間に対する距離の比（の量分数）として速度を求める。
第二式の非標準的方法は 距離から速度への，時間の矢線に沿う後退としての割り算である。

前者では分子において**等分除** “$24\,\mathrm{km} \div 6 = 4\,\mathrm{km}$ ” が現れる。後者では**包含除** “$\dfrac{24\mathrm{km}}{6\mathrm{km}} = 4$ ”が現れる。

1.3.2 と 1.3.3 のそれぞれ二つの割り算は，一つは量分数としての矢線の構成であり，もう一つは記号 ÷ を使う割り算で，（矢線に沿う前進である掛け算の逆演算としての）矢線に沿う後退であった。（後者は，量分数の分母・分子の逆転させての前進である。）

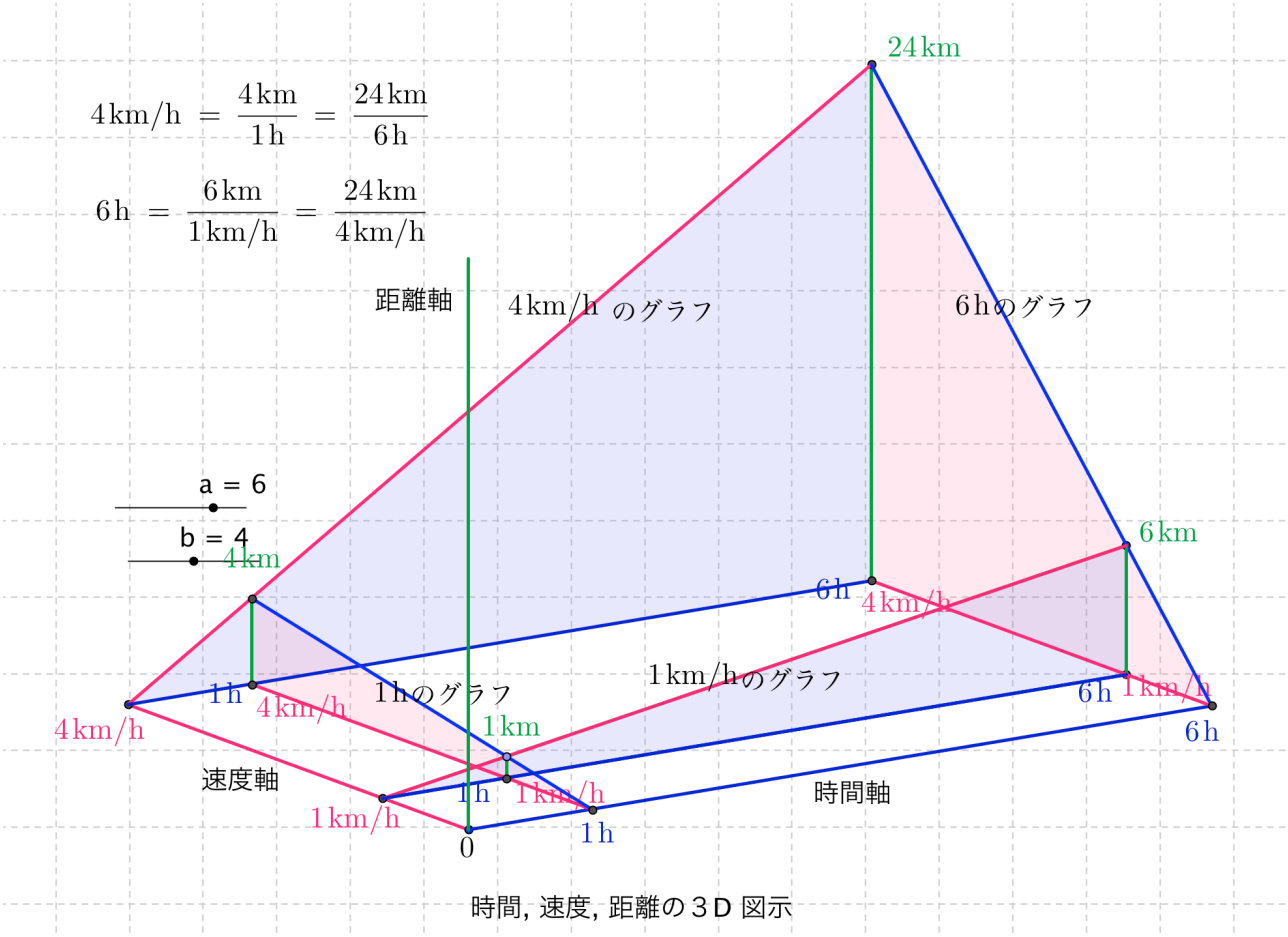
1.3.1 の二つの掛け算が順序によって識別されたのに対して，割り算の二つの意味は分数の形式か割り算記号 ÷ か，で識別される。

## 1.4　3次元の図示

下の三次元の図示では，（時間, 速度)-平面に距離を目盛るのではなく，垂直な距離軸を立てている。時間 $t\,\mathrm{h}$ を例えば平面上の点 $(t\,\mathrm{h}, 4\,\mathrm{km/h})$ と重ねると，時間直線が平面上の縦座標が 4km/h の位置に埋め込まれる。そして対応する距離 $4t\mathrm{km}$ を垂直な距離軸上のその高さに目盛ることで，2ページの「速度 4 km/h のグラフ表現」と同じものが見えてくる。

同じように速度 $v\mathrm{km/h}$ を平面上の点 $(6\mathrm{h}, v\mathrm{km/h})$ と重ねるとき，対応する距離 $6v\,\mathrm{km}$ を垂直距離軸のその高さに目盛ることで，6ページの「時間 6h のグラフ表現」と同じものが見えてくる。

この図から，1km から 24 km への移行が と ×6×4 という二つの可換なルートで行われる様子がよく見える。



時間, 速度, 距離の３D 図示

### 1.4.1　量計算の完全な自動化

**距離を求める**二つのうちの第一式は少し手順を変えて (h×km/h)×(4×6) のように，まず数値を外に出し，単位の部分と分離できる。第二式は (km/h×h)×(6×4) と分離できる。数値について順不同の可換積として 24 となると同時に単位についても順不同の積としてkm/h×h，h×km/h はともに km に等しい。数値と単位を分けての機械的計算で結果は 24km となる。

**時間を求める**第一式も第二式も数値の部分は，分数 $\frac{24}{4}$ （包含除）と 24 ÷ 4 （等分除）の違いは 4 × 6 と 6 × 4 の違いでしかないが，積×4×6 の対称性を前提にするとこの二つの割り算の違いは消滅する。単位の部分は $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ = km/h，あるいは $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{km/h}}$ = h と機械的に処理される。

**速度を求める**第一式も第二式も，数値の部分は 24 ÷ 6 と $\frac{24}{6}$ の区別は消え，単位の部分も $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ = km/h，km ÷ h = km/h と機械的に処理される。より極端には，数値についての公式 $x = vt$ をもとにする機械的処理に到達する。ここではもちろん，数の積の順序は消滅している。

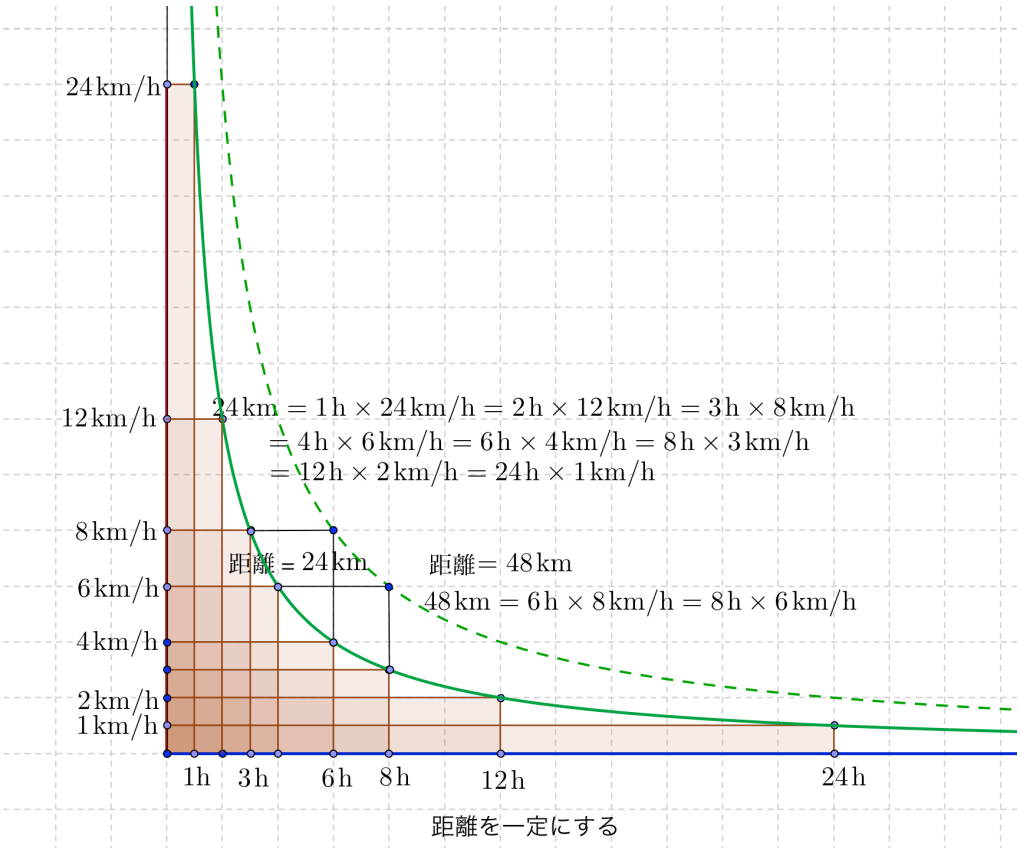
意味に深くこだわり，それに伴って順序を強く意識した分析的，内省的議論と自動化かつ脱順序された機械的処理の習慣はどちらも重要であり，そのバランスを適切にとることが求められる。

習熟とともに自動化は自然に進行する。日常の営みにおいて，脱順序かつ自動化された扱いが支配的になるのは当然の勢いで，それを「悪いこと」と見るのは重大な誤りである。

一方で，子供の成長初期の「掛け算の導入」での順序へのこだわりや，（今やっているような）時としての内省的なメタ算数的な考察など，すべてを敵視あるいは嘲笑することも重大な誤りである。

### 1.4.2 距離を一定にする

下の図は距離を一定値 24 km に固定して，長さと速度の関係を調べている。我々は最初に速度を 4km/h に固定し，次に時間を 6 h に固定した。（未知の一定値として，それらを求める活動も含めて) 固定されたものと扱った。最後は距離を固定する番である。このとき，時間と速度は互いに反比例する。同じことだが，時間と速度が定める長方形の面積は一定（等積）で，その値が 24km である。



時間を$t$h 速度を$v$km/h とするとき，曲線 2 kmの方程式は $vt = 24$ である（双曲線）。$v$ と $t$ の一方を指定すると他方がそれに応じて定まる。それぞれについて，上では二通りの扱いがあることを語ってきたが，$vt = 24$ と数値化されてしまえば，その違いは消滅する。計算は自動化される。

距離が 48 km の等高線も破線で示した。この 48 km を実現する時間と速度の対を二つ書き込んでおいた。

## 2 食塩水の濃度[注12]

### 2.0 濃度と食塩水量から定まる食塩量

「濃度 3%の食塩水量が 200g 」というデータが定める食塩量を積の形 3%×200g に表現する。この順序は（出発点においては）どうでもいいことであり，もし「200gの食塩水がありその濃度は3%」と語り始めたなら 200g×3% という式になったかも知れない。積はいわば順不同の概念である。積とは複比例とほぼ同義語であり，食塩量は濃度と食塩水量に複比例，すなわち双方に比例する。複比例が計算を成り立たせる前提である。複比例を処理するには，どちらか一方の変量を固定してもう一つの変量への比例作用素として扱う。

$$
\begin{aligned}
3\% \times 200\,\mathrm{g} &= (3\% \times 100\,\mathrm{g}) \times 2 = 3\mathrm{g} \times 2 = 6\mathrm{g} && (1)\\
&= (1\% \times 200\,\mathrm{g}) \times 3 = 2\mathrm{g} \times 3 = 6\mathrm{g} && (2)\\
&= (1\% \times 100\,\mathrm{g}) \times (3 \times 2) = 1\mathrm{g} \times 6 = 6\mathrm{g} && (3)
\end{aligned}
$$

紙と筆記用具なしで，頭の中で操作するときは，（私ならば）

「3% で 100g なら 食塩は3g , 200g だから2倍で 6g 」

と， (1) のように考えるか，

「1% で 200g なら 食塩は 2g ，3% だから 3倍で 6g 」

と ，(2) のように考える。紙の上で目で見ながら、そして手を動かしながらのときは，半ば自動的に

「1%×100g で 1g ，3×2 倍で 6g 」

と， (3) のように計算することが多いだろう。

---

注12 ここで濃度と書いたのは，化学や物理での正しい用語法では質量分率（mass fraction)にあたる。濃度という言葉は体積にたいする比率に限定すべきであった。

本稿の次に書いた「物質量，分率と濃度」，2014/11/29 では，反省の上で，分率と濃度の二つを使い分けた。 パーセントの記号 % は分率（質量分率には限らないが）だけに使った。しかし本稿を書き直すことは控え，そのまま残すことにする。

21ページの注 16 で（本来の）濃度のの単位の一つ g/(100 mL) を「vol% と書くこともある」と述べているが，（その場所で既に指摘した通り） g/(100 mL) のままの方が望ましい。なお，濃度(concentration)と密度（density）は状況で使い分けるが，ほぼ同義語である。

濃度 3% は “three per cent” であり[注13]，言葉どおりにこれは “100 当り 3 ” を意味する (three parts for every hundred)。その直接の数学的表現は分数 $\frac{3}{100}$ である[注14]。　言うまでもなく $\frac{3}{100}=0.03$ である。等式　$3\% = \frac{3}{100} = 0.03$ を確認しよう。

記号 % は 0.01 に等しく, 実数の (1に代わる）新しい単位となる。 3% は 数学の立場からは “% の 3倍” である。単位一般のルールに従い，3 と % の間にはスペースを入れるのが正しい。スペースは積の記号の役割をする。% = 001 は数であり物理や化学の用語では無次元 ( dimensionless）の単位である。

日常の生活（食事など）の観点では，食塩水と食塩は異質の存在であり，質量としての同一性などはほとんど意味がない（ 食塩水の“量”はいつも質量というわけではない。体積として捉え，濃度を，溶液の体積をベースに 質量/体積 で表すことも多い）。ここでは単位 “グラム” の書体を g と ｇに書き分けた[注15]。3% は（ $\frac{3}{100}$ というよりは）むしろ<u>量分数</u> $\frac{3\mathrm{g}}{100\mathrm{g}}$ として扱う。 g と ｇは書体が違うので，消去されて純粋の数あるいは「無名数」の $\frac{3}{100}$ にはならない。

この段階で，記法上の順序に関わるのは，3ｇ×2，2ｇ×3，1ｇ×6　という　<u>量に数を掛けるのは右から</u> という取り決めだけである。

---

注13 per cent は二つの単語よりなるが，アメリカ英語では 一単語の percent が普通のようだ。

注14 「$\frac{3}{100}$ は “二つの数の関係” だから “一つの数” である 0.03 よりも難しい」と信じている人がいる。これは 「言葉を頼りに頭の中で作り上げた理屈」に過ぎず，現実は逆であって，”100 のなかの 3” という二つのモノの対比は具体的で目に見える。（100という計数は別として）このような対比の感覚は幼児にもあるし，人類の原始時代にもあったであろう。それがなければ生き抜くことができない。一方，0.03 という小数は抽象的な文化概念であり，歴史的にはずっと遅れて，個人については教育の結果として現れる（ついでに：確率の 0.03 よりも頻度 “100回中の3回” のほうが人間の脳は扱いやすい）。

注15 ｇ は“タイプライター”と呼ばれるフォント・ファミリの一つ。

これから後は食塩水濃度を 5% と決めて延々と議論を続ける．その前に（不釣り合いに長い）脚注として，5% 前後の現実の濃度を見ておくことにしよう[注16]。

## 2.1 濃度 5% を比例作用素とみる。

日常的にどのように計算しているかを一応離れて，計算の構造を内省的に考察する。考察対象は小学校の導入時の扱いである。言うまでもないが，この文章の記述そのものが小学生向けというわけではない。

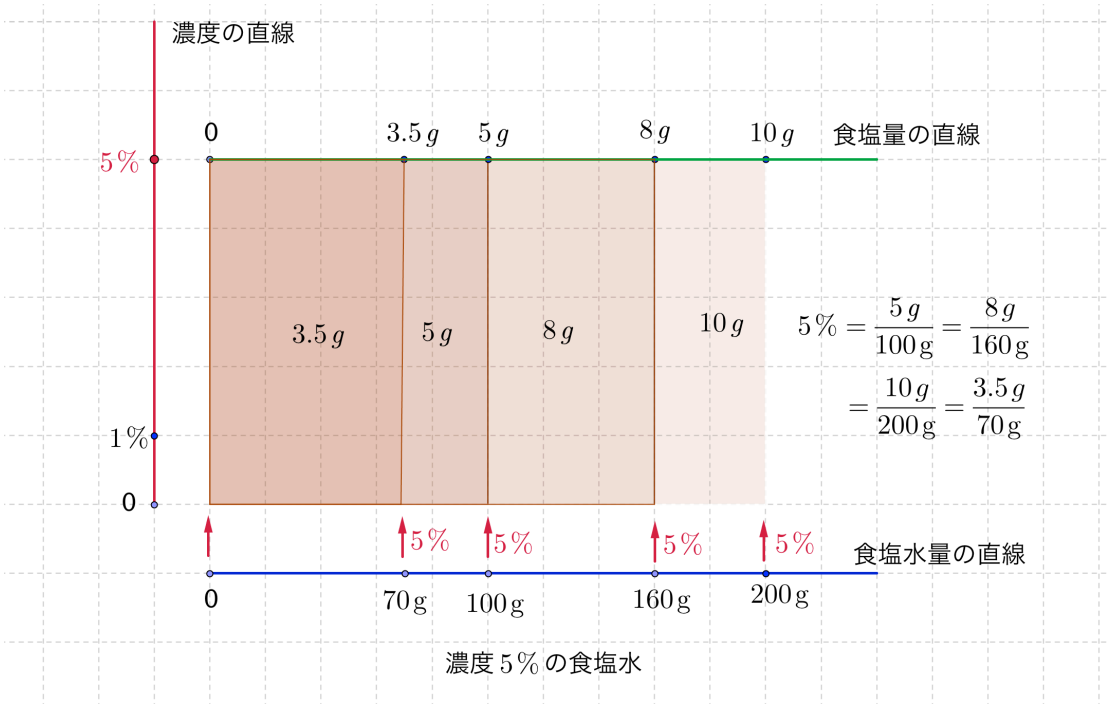
下の図示では 縦の濃度直線（赤）上の一点 5% が固定されている。 水平に食塩水の直線（青）と食塩の直線（緑）が向き会う形で置かれている。食塩水量と濃度の２直線は独立であるが，第3の食塩量の直線は 独立ではない。それは常に伸縮している。今は食塩水量 の 100g の真上に 5g が来るように調整されている。この調整は濃度直線の 5% という点が行っている。さらにこの濃度直線の置かれる位置（高さ）もこの 5% が定めている。

---

注16　海水の塩分濃度は 3.5% 前後である。この塩分の 78% は NaCl でそれはイオン $Na^+, Cl^-$ に分かれて海水に溶けている（他のプラス・イオンとしては，マグネシウム、カルシウム．カリウム）。人間の体（血液など）の塩分濃度は 0.9% であり，それは人間の先祖が海中に暮らしていた4億年前の海水濃度であったと思われている。今の海水濃度では（それを飲みながらでは）人間は生きることができない。魚は海水を飲みながらエラから塩分を排出することで体内の塩分濃度 0.9% を維持している。淡水のなかでは逆にエラから水分を排出しながら塩分は取り込む。生理的食塩水というのは 0.9% の NaCl 溶液である。薄口醤油の塩分濃度が 16%, 濃口醤油が 14.5% というデータがある。味噌汁の塩分濃度は 1% 前後（0.8% から 1.2% ）という記事を見た。

ナトリウム で濃度が表示されることも多い。牛乳のナトリウム濃度が “100 mℓ 中 55 mg” というデータがある。（最近は日本の学校では mL が強制されているが，ここでは在来の mℓ にする。L は不釣り合いに字が大きい。）牛乳の扱いは，お店でも家庭内でも，重量でなく体積によるのが普通だから，このような対体積の濃度表示 $\frac{55\,\mathrm{mg}}{100\,\mathrm{m}\ell} = \frac{0.055\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{m}\ell} = 5.5\times10^{-4}\,\mathrm{g/m}\ell$ の方が理にかなっている。この “100 mℓ 当りの百分率”の単位 $\frac{\mathrm{g}}{100\,\mathrm{m}\ell}$ を vol% と書き，”100 g 当りの百分率” の単位 $\frac{\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}}$ を wt% と書いて区別することがある（volume と weight の略字）。牛乳の塩分濃度はナトリウム表示で 0.055 vol% 程度である。しかし百分率にこだわる必要はなくて，むしろ $\frac{55\,\mathrm{mg}}{100\,\mathrm{m}\ell}$ のような単位の使用のほうが，このオーダーの濃度の表現には好都合である。手元にある125 mℓ 入りの小さなトマトジュース缶ではナトリウム濃度が $\frac{3\,\mathrm{mg}}{125\,\mathrm{m}\ell}$ と記載されている。これは $\frac{2.4\,\mathrm{mg}}{100\,\mathrm{m}\ell} = \frac{2.4\times10^{-5}\,\mathrm{g}}{\mathrm{m}\ell} = 24\,\mu\mathrm{g/m}\ell$ と，かなりの低濃度である。

塩素の原子量 35.5 g/mol, ナトリウムの原子量 23.0 g/mol だから， 食塩濃度への換算は $(23.0+35.5)/23.0 = 2.45$ を掛ければよい。




5% は食塩水直線の各点に作用して食塩直線の点を対応させる。この個別の作用を4個の上向きの赤い矢線で示した。例えば 160g に作用する濃度 5% はその場所では量分数 $\frac{8\text{g}}{160\text{g}}$ （“160g 当り 8g ”）として存在している。これらの量分数表現は濃度 5% という本質（identity）において一致するから，図の中に書き込んだような等式連鎖が成立する。

### 2.1.1　　３つの計算

上の図の中の式の一部

$$5\% = \frac{5\text{g}}{100\text{g}} = \frac{8\text{g}}{160\text{g}}$$

を取り出そう。量分数に関わるこの等式連鎖に三つの計算

$$160\text{g} \times 5\% = 8\text{g},$$
$$8\text{g} \div 5\% = 160\text{g},$$
$$\frac{8\text{g}}{160\text{g}} = 5\%$$

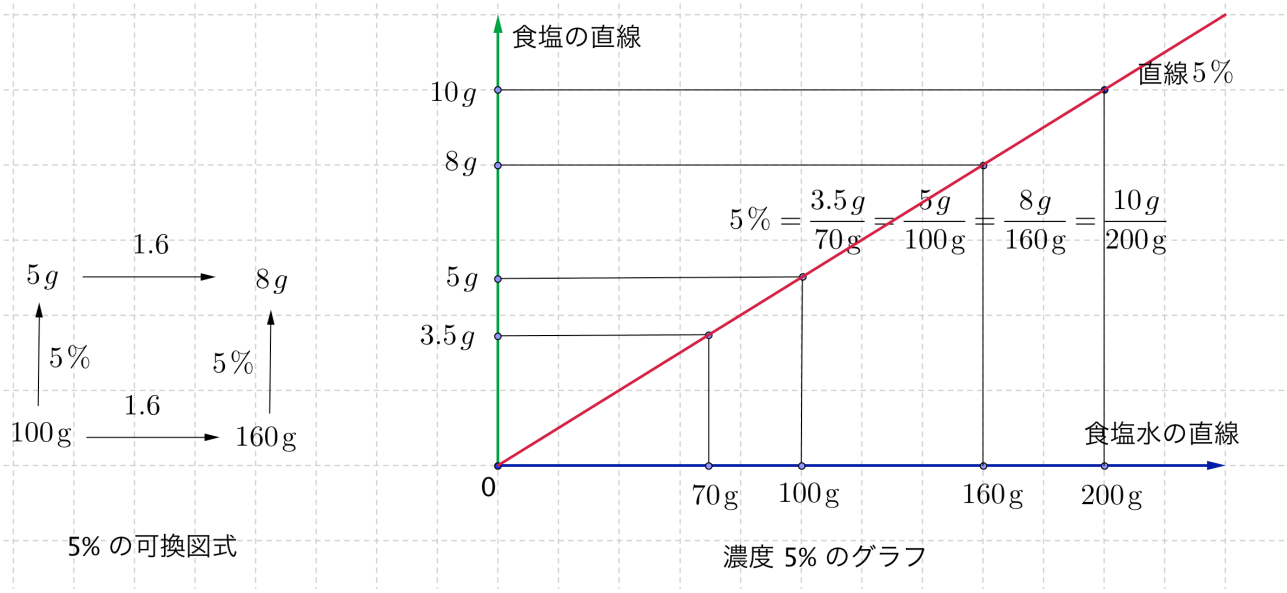
が含まれている。

矢線 5% に沿う前進が掛け算 ×5% であり，それは分母 160g を分子の8g にうつす（移す，写す）。矢線 5% に沿う後退が割り算 ÷5% であり，それは分子の 8g を分母の160g にうつす。この文脈で ×5% と ÷5% は一対のセットであり，当然右から作用する（なぜ当然か、理由の一つは “5% ÷ ” と左から割る習慣はないからである）。一方，量分数 $\frac{8\mathrm{g}}{160\mathrm{g}}$ の標準化（分母を 100g に変える）により，この量分数が定める濃度の表現 5% が得られる。

### 2.1.2 可換図式と関数グラフ

上の左側の可換図式（commutative diagram）では，二つの 5% はそれぞれ量分数 $\frac{5\mathrm{g}}{100\mathrm{g}}$ , $\frac{8\mathrm{g}}{160\mathrm{g}}$ として働いている。二つの 1.6 はそれぞれ包含除 $\frac{8\mathrm{g}}{5\mathrm{g}}$ , $\frac{160\mathrm{g}}{100\mathrm{g}}$ として働いている。

下の右側の「濃度 5% のグラフ」では，この赤い直線そのものが 5% である。直線上の個々の点は 5% の作用点ごとの存在形態（aspect, appearance）としての量分数たちである。




上の三つの計算をそのプロセスとともに 示す。

$$160\,\mathrm{g}\times 5\% \;=\; 160\,\mathrm{g}\times\frac{5\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} \;=\; 5\,\mathrm{g}\times\frac{160\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} \;=\; 5\,\mathrm{g}\times 1.6 \;=\; 8\,\mathrm{g}, \qquad (1)$$

$$8\,\mathrm{g}\div 5\% \;=\; 8\,\mathrm{g}\;\times\;\frac{100\,\mathrm{g}}{5\,\mathrm{g}} \;=\; 100\,\mathrm{g}\;\times\;\frac{8\,\mathrm{g}}{5\,\mathrm{g}} \;=\; 100\,\mathrm{g}\;\times\;1.6 \;=\; 160\,\mathrm{g}, \qquad (2)$$

$$\frac{8\,\mathrm{g}}{160\,\mathrm{g}} \;=\; \frac{8\,\mathrm{g}\;\div\;1.6}{100\,\mathrm{g}} \;=\; \frac{5\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = 5\% \qquad (3)$$

(1) と (2) は同じ矢線に関する前進と後退だから，計算の構造は全く同じである。詳細に記述したことでそれが見えてきた。「数の計算」のレベルでは (1) は掛け算 “×1.6 ”，（2）は包含除 “$\frac{8\,\mathrm{g}}{5\,\mathrm{g}}=1.6$ ” が意識される。(3) では 数で割る演算 （拡張された等分除） ÷1.6 が意識される。

### 2.1.3 自然言語による表現

日本語の文章に翻訳すると

（1） 「食塩水 160g の5%の食塩」は

「“食塩水 100g 当たりの食塩” 5g の “160g 分” すなわち1.6 倍」

で 8g となる。（注意：100g を単位としているので，“160g 分” は ”160g/100g 倍 ＝ 1.6 倍” である。）

(2) 「その 5% が食塩 8g であるような食塩水」は 5% の矢線を逆行する「8g ÷ 5%」であり，それは

「“食塩 5g 当たりの食塩水” 100g の “8g 分” すなわち 8g/5g 倍 = 1.6 倍」

すなわち 「100 g × 1.6」で 160 g となる。（5g が単位なので “8g 分” は 8g/5g 倍 = 1.6 倍である。）

（3）「160g の食塩水中の食塩が 8g 」のとき，濃度は $\frac{8\,\mathrm{g}}{160\,\mathrm{g}}$ であるが，分母を 160 g から 100 g ＝ 160 g ÷ 1.6 に変えるとき，分子も 8g から 8g ÷ 1.6 = 5g に変わる。

よって濃度は「 $\frac{5\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = 5\%$ 」となる。

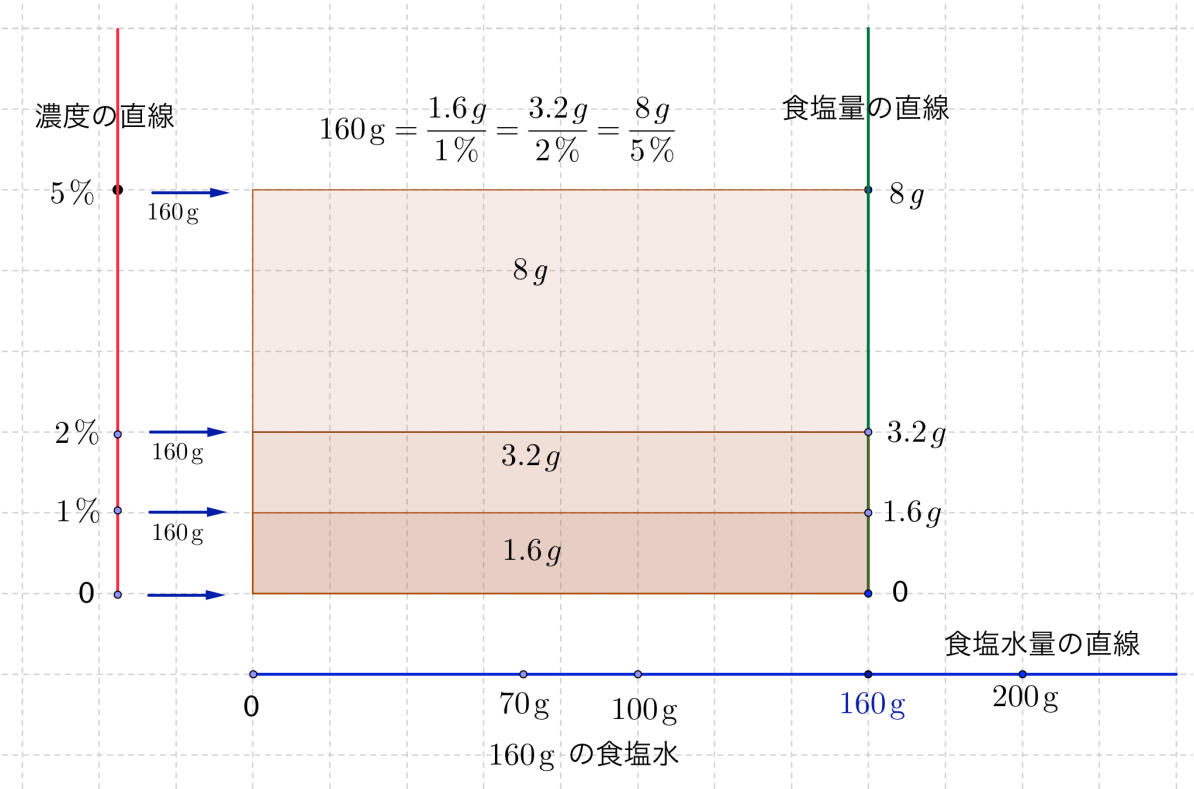
数式が読めること，すなわち，数式と日常言語の間のこのような相互移行がすぐにできることが，数学リテラシー（読み書き能力）の大事な要素である。

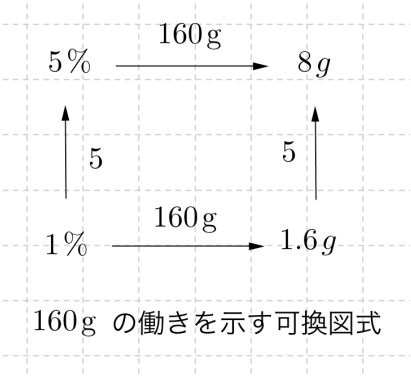
## 2.2 食塩水 160g を比例作用素とみる

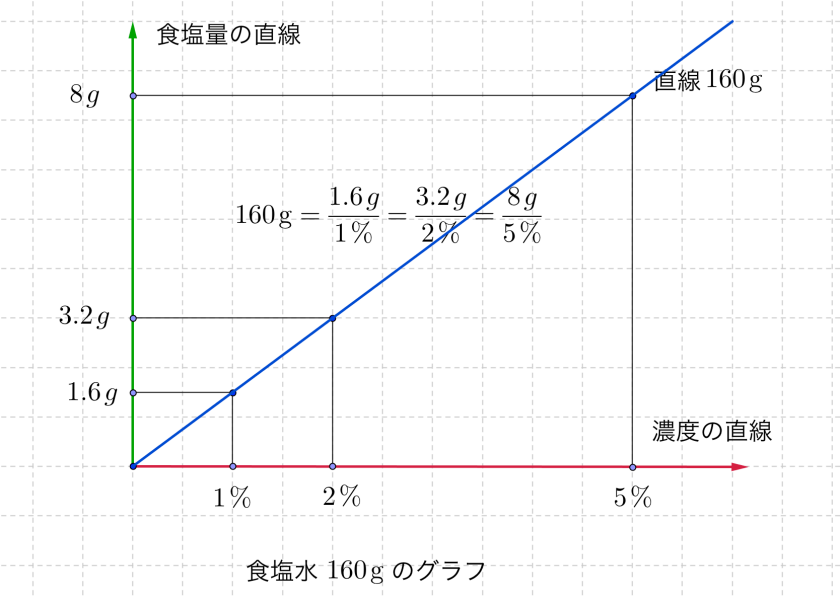
あるいは食塩水をたとえば 160g に固定してそれを濃度から食塩量への比例作用素と考えることもできる。

この対比は速度と時間の（距離に関する）**双対性**と全く同じである。時間が速度の比例作用を受けることを通して逆に時間が速度に作用する，それと同様に，濃度が液量に作用することを通じて，逆に液量は濃度を対象とする比例作用素となる。この 溶質である食塩に関する 濃度と溶液量の双対性（duality）が議論の骨格である。

以下に，液量を作用素とする，状況の説明図，グラフ，可換図式の３つを示す。それぞれに dual な（濃度を作用素とする） 説明図，グラフ，可換図式は 2.1 にある。その対比を見ることは，1.1 と 1.2 での速度と時間の双対性の議論のヴァリエーション（変奏曲）であり，今は説明の文章を省略する。



### 2.2.1　３つの計算

図の中に書き込まれた等式連鎖の一部

$$160\ \mathrm{g} = \frac{1.6\mathrm{g}}{1\%} = \frac{8\mathrm{g}}{5\%}$$

は三つの式のセット

$$5\% \times 160\mathrm{g} = 5\% \times \frac{1.6\mathrm{g}}{1\%} = 1.6\mathrm{g} \times \frac{5\%}{1\%} = 1.6\mathrm{g} \times 5 = 8\mathrm{g}, \quad (1)$$

$$8\mathrm{g} \div 160\mathrm{g} = 8\mathrm{g} \times \frac{1\%}{1.6\mathrm{g}} = 1\% \times \frac{8\mathrm{g}}{1.6\mathrm{g}} = 1\% \times 5 = 5\%, \quad (2)$$

$$\frac{8\mathrm{g}}{5\%} = \frac{8\mathrm{g} \div \frac{5\%}{1\%}}{1\%} = \frac{8\mathrm{g} \div 5}{1\%} = \frac{1.6\mathrm{g}}{1\%} = 160\mathrm{g} \quad (3)$$

を含んでいる。この場合は掛け算 $\times 160\mathrm{g}$ が，割り算 $\div 160\mathrm{g}$ と対になって<u>右側から作用</u>している。

160g は “1% を 160g に運ぶ” 比例作用素として量分数 $\frac{1.6\mathrm{g}}{1\%}$ で書かれる。分母を5% にするとき，分子は5倍になる。これが掛け算 × 160g である。　割るほうの ÷ 160g は 矢線に沿う後退だから，“1.6g を 1% に運ぶ”。それは分母と分子を入れ替えた分数の掛け算 $\times \frac{1\%}{1.6\mathrm{g}}$ である。

これが「割り算」であることは包含除 $\frac{8\mathrm{g}}{1.6\mathrm{g}}$ として維持される。

少し詳しすぎるプロセスの提示だが，そのおかげで，掛け算 $\times 160\mathrm{g}$ と割り算 $\div 160\mathrm{g}$ の構造の一致が鮮明に示された。掛け算と割り算は矢線に沿う前進と後退だから，その違いは量分数表示における分母と分子の交代であり，それに尽きる。

下の量分数の変形 (4), (5) の結果として 掛け算 (1), 割り算 (2) が<u>ほとんど自動的に</u> 得られる。分母を決めて分子を合わせるにが掛け算，分子を決めて分母を合わせるのが割り算である。

$$160\mathrm{g} = \frac{1.6\mathrm{g}}{1\%} = \frac{1.6\mathrm{g} \times \frac{5\%}{1\%}}{5\%} = \frac{1.6\mathrm{g} \times 5}{5\%} = \frac{8\mathrm{g}}{5\%}, \quad (4)$$

$$= \frac{8\mathrm{g}}{1\% \times \frac{8\mathrm{g}}{1.6\mathrm{g}}} = \frac{8\mathrm{g}}{1\% \times 5} = \frac{8\mathrm{g}}{5\%} \quad (5)$$

### 2.2.2 日本語に翻訳

(1)　「濃度 5% の食塩水 160g に含まれる食塩」すなわち「5% × 160g 」は

「“1% 当たりの食塩” すなわち1.6g ” の “5% 分”すなわち 5 倍」

の「1.6g × 5」で 8g となる。

(2) 「食塩 8g が食塩水 160g に含まれるときの濃度」 すなわち「8g ÷ 160g 」は

「“1.6g 当たりの濃度” すなわち 1% の “8g 分 ” すなわち 8g /1.6g 倍 = 5 倍」

の 「1% × 5」で, 5% となる。

(3) 食塩水量を一定とすると濃度に食塩量が比例する。

「濃度 5% 当りの食塩量が 8g 」

ならば

「 “濃度 1%当りの食塩量 は 8g÷5 = 1.6g 」

で , 比は $\frac{1.6\text{g}}{1\%}$ となり, これを実現する食塩水量はは160g に他ならない。

## 2.3 互いに双対な二つの立場

次ページの表にまとめた。表の左側の濃度を線型作用素とする方式を標準的, 右側の食塩水量を線型作用素とする方式を非標準的と呼ぶことにしている。

表の掛け算の段で見ると,

(5%が比例作用素) 5g×1.6 = 8g,　　(160gが比例作用素) 1.6g×5 = 8g

のように, 数値レベルでは 5 と 1.6 の順序の交換として違いが表れている。

カップ一杯が 160g と決まっている味噌汁では, 食塩量は 濃度 1% なら 1.6g , 2% なら 3.2g (2% ですでに食塩の過剰 !) と考える非標準的方式も, ごく普通に使われている。実はこの “非標準的方式” が世の中の標準である。

| 矢線 | 5% | 160g |
|---|---|---|
| 矢線を作る | $\frac{8\text{g}}{160\text{g}}=\frac{8\text{g}\div 1.6}{100\text{g}}=\frac{5\text{g}}{100\text{g}}=5\%$ | $\frac{8\text{g}}{5\%}=\frac{8\text{g}\div 5}{1\%}=\frac{1.6\text{g}}{1\%}=160\text{g}$ |
| 矢線に沿う前進 | $160\text{g}\times 5\%=5\text{g}\times\frac{160\text{g}}{100\text{g}}=5\text{g}\times 1.6=8\text{g}$ | $5\%\times 160\text{g}=1.6\text{g}\times\frac{5\%}{1\%}=1.6\text{g}\times 5=8\text{g}$ |
| 矢線に沿う後退 | $8\text{g}\div 5\%=100\text{g}\times\frac{8\text{g}}{5\text{g}}=100\text{g}\times 1.6=160\text{g}$ | $8\text{g}\div 160\text{g}=1\%\times\frac{8\text{g}}{1.6\text{g}}=1\%\times 5=5\%$ |

### 2.3.1 対体積濃度 vol%

2.0 特にその注11 でふれた対体積の濃度は日常の生活の中で基本的である。ここは計算目標別の互いに双対な二つの式の対比をための項であるが, それを, 対体積濃度でやってみる。やってみて分かることは, 対重量の濃度の場合と構造は全く同一である, ということである。液量を 160g から 70mℓ に変更した。

食塩量を求める（掛け算）

$$70\,\mathrm{m}\ell \times 5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell \;=\; 70\,\mathrm{m}\ell \times \frac{5\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{m}\ell} \;=\; 5\,\mathrm{g} \times \frac{70\,\mathrm{m}\ell}{100\,\mathrm{m}\ell} \;=\; 5\,\mathrm{g} \times 0.7 \;=\; 3.5\,\mathrm{g}, \quad (6)$$

$$5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell \times 70\,\mathrm{m}\ell = 5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell \times \frac{0.7\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell} = 0.7\,\mathrm{g} \times \frac{5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell}{1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell} = 0.7\,\mathrm{g} \times 5 = 3.5\,\mathrm{g} \quad (7)$$

食塩水量を求める（割り算と分数）

$$3.5\,\mathrm{g} \div 5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell \;=\; 3.5\,\mathrm{g} \times \frac{100\,\mathrm{m}\ell}{5\,\mathrm{g}} \;=\; 100\,\mathrm{m}\ell \times \frac{3.5\,\mathrm{g}}{5\,\mathrm{g}} \;=\; 100\,\mathrm{m}\ell \times 0.7 \;=\; 70\,\mathrm{m}\ell, \quad (8)$$

$$\frac{3.5\,\mathrm{g}}{5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell} \;=\; \frac{3.5\,\mathrm{g} \div 5}{1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell} \;=\; \frac{0.7\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell} \;=\; 70\,\mathrm{g} \quad (9)$$

濃度を求める（分数と割り算）

$$\frac{3.5\,\mathrm{g}}{70\,\mathrm{m}\ell} = \frac{3.5\,\mathrm{g} \div 0.7}{100\,\mathrm{m}\ell} = \frac{5\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{m}\ell} = 5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell, \quad (10)$$

$$3.5\,\mathrm{g} \div 70\,\mathrm{m}\ell = 3.5\,\mathrm{g} \times \frac{1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell}{0.7\,\mathrm{g}} = 1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell \times \frac{3.5\,\mathrm{g}}{0.7\,\mathrm{g}} = 1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell \times 5 = 5\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{m}\ell \quad (11)$$

それぞれを日本語の文章に翻訳できる（その中に数式が混じる中途半端なものだが）。例えば (7) については

“1g/100mℓ 当りの食塩” = 0.7g の “5g/100mℓ 分” すなわち 5倍

### 2.3.2 百分率回避の姿勢

小学校では 5% を 0.05 で置き換えることになっているようだ。これは 5% を評価するのに 1% を単位とせずに 100% を単位にしてその 0.05倍 と言っているわけで，結局のところ，% 表示を回避しようとしている[注17]。それは 5% を本来の $\frac{5\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}}$ ではなくて $\frac{0.05\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g}}$ と解釈することである。

表の掛け算の段の計算は，100g でなく1g を基準とし，1% でなく100% を基準とすることになり，

$$160\,\mathrm{g} \times 5\% = 160\,\mathrm{g} \times \frac{0.05\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g}} = 0.05\,\mathrm{g} \times \frac{160\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g}} = 0.05\,\mathrm{g} \times 160 = 8\,\mathrm{g}, \quad (12)$$

$$5\% \times 160\,\mathrm{g} \;=\; 5\% \times \frac{160\,\mathrm{g}}{100\%} \;=\; 160\,\mathrm{g} \times \frac{5\%}{100\%} \;=\; 160\,\mathrm{g} \times 0.05 = 8\,\mathrm{g} \quad (13)$$

---

注17 % はこわがることはない。1 あたりを 100倍しただけのことだから，100 でわれば，もとの 1 あたり量がでてくるのさ（[8] の p.66）。 本当はその時々に適切な新しい単位に自由に移り，そこで計算できることが重要で，「もとの 1 当りに戻れる」という一方向だけの強調はまずいと思う。

と変わる。

(12) はその第4辺までに見るように

「“食塩水 1g 当りの食塩量” である 0.05ｇ の “160g 分” すなわち 160倍」

である。

(13) はその第4辺までに見るように

「“濃度 100% 当りの食塩量” である 160ｇ の “5% 分” すなわち 0.05 倍」

という計算になる。

しかし濃度 100% の食塩水は存在しない。最大の濃度（溶融度と言う）は36% 程度であり，そこにあるのは固体の食塩である。こういう非現実的な状況をわざわざ経由してその0.05 倍に移ることになっている。したがって100% を単位に考える場合は, 0.05ｇ/g でなく，普通に（ 同じフォントで）0.05g/g とし，

$$160\,\mathrm{g} \times 0.05 = 8\,\mathrm{g} \qquad (14)$$

という食塩水のなかの等式 を考える方がよいだろう。この 8g という食塩水の部分（パート）が食塩，残りの 152g が水であると考える。

### 2.3.3 遠山啓の濃度

『遠山啓 エッセンス 3 — 量の理論』[ 7 ] の p.55 に

「『5%の食塩水 70cm$^3$ の中に食塩はどれだけはいっているか』という問題でも，これまでのように　70g×0.05 = 3.5g ではなく，0.05g×70 = 3.5g という式を立てるのである。」

という文がある。

5% とはなんだろうか？　少し前 (p.52) に

「率は同種の量の商で、純粋な数となる。濃度は度がついていても，ここでいう率の部類」

と言っているので，対重量パーセント 0.05g/g ＝5 wt% のことかとも思ったが、次の p.56 を見ると「1cm$^3$ に 0.05g ずつの食塩」と書いてある。 5% とはやはり 0.05g/cm$^3$ = 5vol%　（ wt%, vol% は 2.0 の注13 で説明した記号）のことであった。

では

$$70\,\mathrm{g} \times 0.05 = 3.5\,\mathrm{g}$$

はどこから出てきたのだろうか？[注18]　一つの理解の仕方は，体積 $70\,\mathrm{cm}^3$ を比例作用素 $\dfrac{70\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3}$ と解釈する，すなわち体積$70\,\mathrm{cm}^3$が

「濃度$1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ 当りの 食塩は $70\,\mathrm{g}$ 」

という比例作用を引き起こしていると解釈することによる。濃度 $0.05\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ に対する食塩 $1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ を

「“濃度 $1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ 当りの食塩” すなわち$70\,\mathrm{g}$ の “$0.05\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ 分” すなわち 0.05 倍」

と考えるのである。結果は確かに $70\,\mathrm{g}\times 0.05$ となる。この計算は 2.3.1 の 式 (7) ですでに実行している。単位の取り方を今の文脈に合わせて書き直すと

$$0.05\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\times 70\,\mathrm{cm}^3 = 0.05\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3\times\frac{70\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3} = 70\,\mathrm{g}\times\frac{0.05\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3}{1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3} = 70\,\mathrm{g}\times 0.05 = 3.5\,\mathrm{g} \qquad (15)$$

となる。この式（等式連鎖）は，与えられた二つのデータから出発している。思考のプロセスを経て、第4辺で遠山の$70\,\mathrm{g}\times 0.05$ に到達する[注19]。

もう一つの 式「 $0.05\,\mathrm{g}\times 70 = 3.5\,\mathrm{g}$ 」は 2.3.1 の (6) に対応する

$$70\,\mathrm{cm}^3\times 0.05\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3 = 0.05\,\mathrm{g}\times 70 = 3.5\,\mathrm{g} \qquad (16)$$

によって、自然に理解できる。これは

「“$1\,\mathrm{cm}^3$ 当りの食塩量” すなわち $0.05\,\mathrm{g}$ の “$70\,\mathrm{cm}^3$ 分” すなわち 70倍」

である。

次へ進もう。遠山は続ける：

「またこれまで比の第3用法と名づけられていたものも考え方が違ってくる。

『5%の食塩水が 4g の食塩を含むとき、総量はいくらか』

---

注18 $70\,\mathrm{g}$ で 5 wt% = $0.05\,\mathrm{g/g}$ の場合ならば確かに「これまでのように」かも知れない。しかし，$70\,\mathrm{cm}^3$ で対体積パーセント$0.05\,\mathrm{g/cm}^3 = 5\,\mathrm{vol\%}$ の場合にも $70\,\mathrm{g}\times 0.05 = 3.5\,\mathrm{g}$ であることはそれほど自明ではない，ように思われる。

$70\,\mathrm{g}$ は何だろうか？　$70\,\mathrm{cm}^3$ の食塩水の重量ならば，食塩の比重が 2.17 なので $70\,\mathrm{g}$ を超えるだろう。（食塩水 1g の体積は$1\,\mathrm{cm}^3$ 未満だから）対重量パーセント は $5\,\mathrm{wt\%} = 0.05\,\mathrm{g/g}$ を下回る。 では，重量$70\,\mathrm{g}$ に掛かる数値の 0.05 はどこから現れたのだろうか？

注19 濃度 $1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ の食塩水の作り方：固体（結晶）の食塩の密度が $2.17\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ であるから，1g の食塩の体積は $1\,\mathrm{g}\div 2.17\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3 = 0.46\,\mathrm{cm}^3$ である。それに水を追加して $1\,\mathrm{cm}^3$ にすることで濃度 $1\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$ は実現される（追加する水の体積がどれほどかは，算数というより理科の問題である）。ただしこれほどの食塩は全部は溶けずに固体のまま残る。やはり不自然である。私の式 (7) のように $1\mathrm{vol\%} = 1\,\mathrm{g}/100\,\mathrm{cm}^3$ を単位にするほうが合理的である。

という問題は，$1\mathrm{cm}^3$ に $0.05\mathrm{g}$ ずつの食塩をふくんでいるので，$4\mathrm{g}$ の食塩になるには

$$4\mathrm{g} \div 0.05\mathrm{g} = 80$$

となる。これは包含除の適用である。

これまでのように等分除の小数への拡張として考えるよりは，このほうが子どもには考えやすいだろう。」

「度の第3用法」というならば,

$$4\mathrm{g} \div 0.05\mathrm{g/cm}^3 = 4\mathrm{g} \times \frac{1\mathrm{cm}^3}{0.05\mathrm{g}} = \frac{4\mathrm{g}}{0.05\mathrm{g}}\mathrm{cm}^3 = 80\mathrm{cm}^3 \qquad (17)$$

となるところだが，包含除 $4\mathrm{g} \div 0.05\mathrm{g} = 80$ はこの計算プロセスにおける一つの断片に過ぎず, $80\mathrm{cm}^3$ さえも姿がない。これが遠山の特徴である。

一方，「これまでのように等分除の小数への拡張として考える」　というときの式を遠山は書いていないが,

$$4\mathrm{g} \div 0.05 = 80\mathrm{g}$$

以外は考えられない。これが冒頭の「これまで比の第3用法と名づけられていたもの」に当たるのだろう。しかし，$4\mathrm{g} \div 0.05 = 80\mathrm{g}$ という式だけでは $80\mathrm{cm}^3$ という答えへの距離が大きいと思う。正しい方針は

$$\frac{4\mathrm{g}}{0.05\mathrm{g/cm}^3} = \frac{4\mathrm{g} \div 0.05}{1\mathrm{g/cm}^3} = \frac{80\mathrm{g}}{1\mathrm{g/cm}^3} = 80\mathrm{cm}^3$$

のように，状況設定から始まる計算のプロセスを数式化することである。これには等分除 $4\mathrm{g} \div 0.05 = 80\mathrm{g}$ という，プロセスの一要素も明示されているし，なぜ単位が g から $\mathrm{cm}^3$ に変わるかも明白である[注20]。これは割り算の中でも，量分数の形で，濃度に対する食塩量の比を求める計算であり，食塩水量に“食塩量/濃度”という“度”の機能を持たせたときの「度の第1用法」にあたる。

“食塩量に関して互いに双対（dual）である食塩水量と濃度の立場を入れ替える”

という基本的な数学の構造を把握しなければならない。

### 2.3.4 「数教協」の“内包量 × 外延量”

遠山は $0.05\mathrm{g} \times 70$ について“内包量 × 外延量”であると言う。しかし $0.05\mathrm{g}$ は食塩重量であって濃度ではない。これをなぜ内包量と呼ぶのか？（重量は「数協協」では外延量と呼ぶのでは？）。 また 70 は数であって体積ではない。これをなぜ外延量と呼ぶのか？ 式全体としては, $0.05\mathrm{g} \times 70$ はどう見ても“外延量 × 純粋数”であり，“内包量 × 外延量”ではない！

---

注20 「“ $1\mathrm{cm}^3$ 当り食塩が 1g ”という濃度のときに食塩総量が $80\mathrm{g}$ 」という状況を作り出す食塩水量は $80\mathrm{cm}^3$ で決まり。

状況設定の式 $0.05\text{g}/\text{cm}^3 \times 70\text{cm}^3$ ならば確かに“内包量 × 外延量”である（私のルールとは語順が逆だが）。しかし遠山は，状況設定の式ではなくて，その計算のプロセスで現れる“外延量 × 数”である $0.05\text{g} \times 70$ を指して，いつも“内包量 × 外延量”と呼ぶ。

“$1\text{cm}^3$ 当りの食塩量が 0.05g ”という濃度（内包量）$0.05\text{g}/\text{cm}^3$ と，食塩量（外延量）0.05g が区別されない（区別できない？ あるいは，したくない？）[注21]。体積（外延量）である $70\text{cm}^3$ と（“$70\text{cm}^3$ 分”だから 0.05g を 70倍するというときの）純粋数 70 が区別されない。

この「分数（分母，分子のペア）と分子を区別しない」のが「数教協」の著しい特徴であるが，その中で，遠山は「$0.05\text{g} \times 70$ は“内包量 × 外延量”」と言い，遠山以後の今日の「数教協」は「$0.05\text{g}/\text{cm}^3 \times 70\text{cm}^3$ は“内包量 × 外延量”」と言う。

では遠山以後の「数教協」は $0.05\text{g} \times 70$ を何と呼ぶか？　この $0.05\text{g} \times 70$ がもともとない。$0.05\text{g}/\text{cm}^3 \times 70\text{cm}^3$ の計算プロセスに現れる，そして「算数」としての根幹であるはずの $0.05\text{g} \times 70$ を「数教協」は排斥する[注22]。

もう一方の $70\text{g} \times 0.05$ について遠山は

「外延量 × 内包量 であって“度の第2用法”とは異質のものである」

と言う。これまで繰り返し述べてきたように，$70\text{cm}^3$ と $0.05\text{g}/\text{cm}^3$ は互いに双対なペアとして存在する。内包量と外延量という立場は絶えず交換される（外延量 $70\text{cm}^3$ は内包量 $70\text{g}/(\text{g}/\text{cm}^3)$ として振る舞う）。その反映として

“$0.05\text{g} \times 70$ と $70\text{g} \times 0.05$ ”

という一対の（同質の）式が，ともに「度の第2用法」として存在する。「異質である」で思考が終わるのはこの全体の構図が見えていないからである。

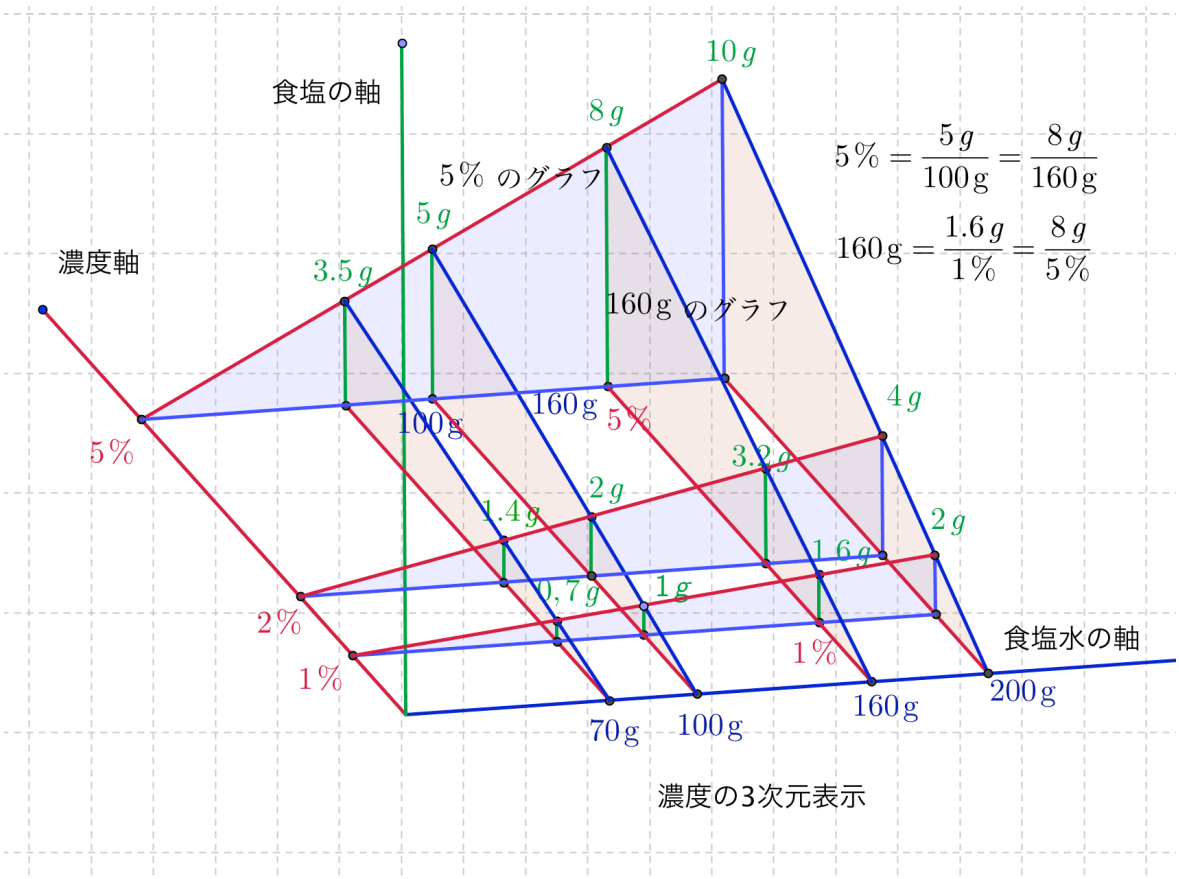
## 2.4 順序中立に戻る

### 2.4.1 濃度の3D 表示

---

注21 これまで名詞節（clause）と名詞句（phrase）

注22 しかも，$0.05\text{g}/\text{cm}^3 \times 70\text{cm}^3$ と書き，$0.05\text{g} \times 70$ を拒否しながら，彼らの $0.05\text{g}/\text{cm}^3$ は 0.05g でしかなく，$70\text{cm}^3$ は 70 でしかない。結果として，遠山が $0.05\text{g} \times 70$ と書くのと同じようなものが実際にはそこにある。「“× 70”はモノでなくて操作である。したがって・・」という例のイデオロギーが強く働いている。割り算のときは $3.5\text{g} \div 0.05\text{g}/\text{cm}^3 = 70\text{cm}^3$ と書きながら，掛け算では $70\text{cm}^3 \times 0.05\text{g}/\text{cm}^3 = 3.5\text{g}$ という語順にならない理由は，「数教協」の $0.05\text{g}/\text{cm}^3 \times 70\text{cm}^3$ が本当は $0.05\text{g} \times 70$ でしかないからであろう。



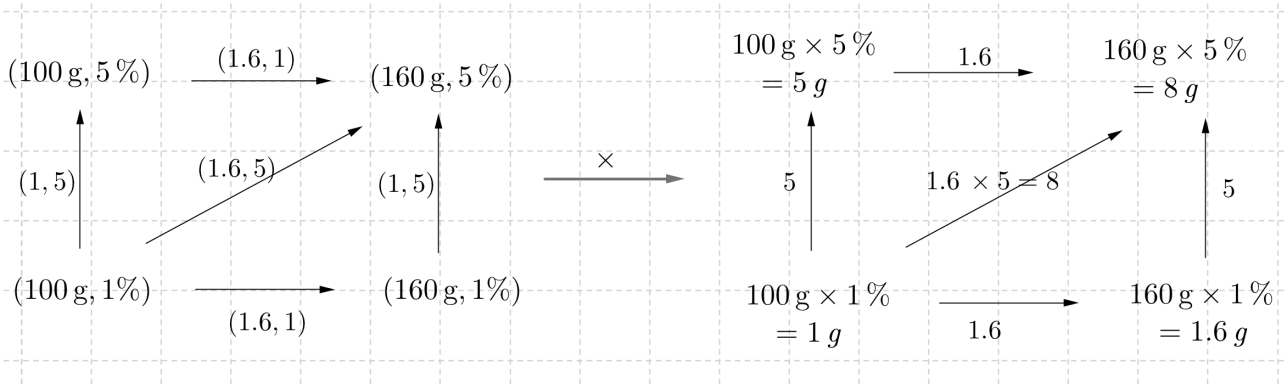

### 2.4.2 機械的・順序中立的計算

食塩水の軸と濃度の軸は平面の様々な場所に埋め込まれている。5%の直線（グラフ）とともに160g の直線（グラフ）も見える。

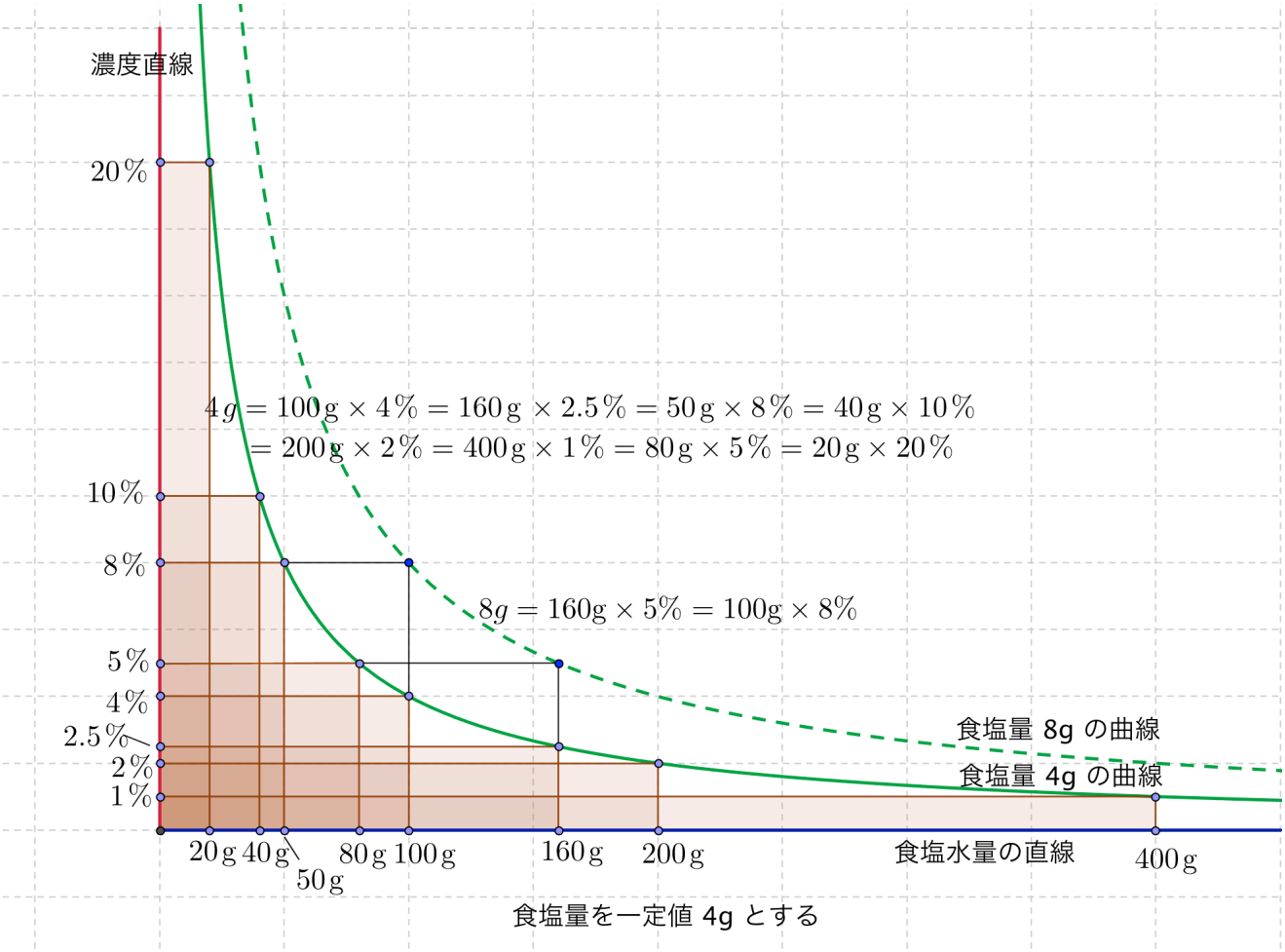
複比例を**順序中立的**に扱い，

$$160\,\mathrm{g} \times 5\% = (100\,\mathrm{g} \times 1\%) \times (1.6 \times 5)$$
$$= 1\,\mathrm{g} \times 8 = 8\,\mathrm{g}$$

のように計算することも多い。数値と単位を分離し、それぞれを計算している。




文字の使用で食塩水量を $x$g，濃度を $y$%，食塩量を $z$g とすれば，$z = \dfrac{xy}{100}$ である。例えば濃度が 5%で食塩量が 8g ならば，方程式 $\dfrac{5x}{100} = 8$ を解いて $x = 160$ となり，食塩水は 160g である。文字式の世界につなげることが大きな課題である。




食塩量を一定にする。文字を使う扱いの続きとして，食塩が4g（$z=4$）のときは，$\dfrac{xy}{100}=4$ となり，食塩水量と濃度が反比例する。グラフを描く。

食塩量が 4g で一定という<u>等積すなわち等面積</u>の条件で長方形が変動する。長方形の右上の角の軌跡が「食塩量 4g の曲線」である。ここでは関数式 $y=\dfrac{400}{x}$ のグラフとして描いている。

## 参照文献

[1]　掛け算の順序について　I　　—離散量からはじめる—　　2013年7月1日
[2]　量の計算の諸側面（3）　2011年10月29日，11月12日, 20日
[3]　量の計算の諸側面（4）　2011年11月26日

[1] で「次は II で連続量の場合を」と予告しながら実行していなかった。数学の内容がまずあり，「掛け算の順序」はその表現の一手段に過ぎないことから，順序を論じることはすべてを論じることの一部となるので，気が重かった。実はこの論考は [2]と[3] をまずコピペし，適宜に“順序” へのコメントを加えながら作った。離散から連続への移行で新しく発生する原理的問題は殆どない。本質的には離散の場合のごく自然な拡張にすぎない。

[4] 速度×時間と数直線　2012/08/05
[5] 距離÷速度，距離/時間 再論（白楽） 2012/05/27

[4] と [5] は伸縮する距離直線を精密に描いている。本稿では連続量といいながら，速度の議論をすべて整数値で行っている。先行する [4] と [5] はそれを小数値で実行しているが，それを可能にしたのが伸縮距離直線の精密化である。GeoGebra で作成した伸縮自在な距離直線で連続量の表現に対応した。

[6] 速度，量分数，時間-速度対 2012/08/05

[6] は速度概念の“幾何学化”を追求した作品。白楽サークル（何森仁・主宰）のおかげで書けた。

[7] 遠山 啓 エッセンス　3　量の理論（銀林，榊，小沢編），2009年，日本評論社
[8] 量の世界 — 速さ・密度・濃さ・流れの量（市川良著，榊忠男監修，太郎次郎社，2001年）

（この論稿は「数理科学・数理教育研究会」という長い名前の会（小島順・研究室のOB の会）の例会（2014/07/13 ＠本郷中学校・高等学校）のために用意した資料の一つの改訂版である。）