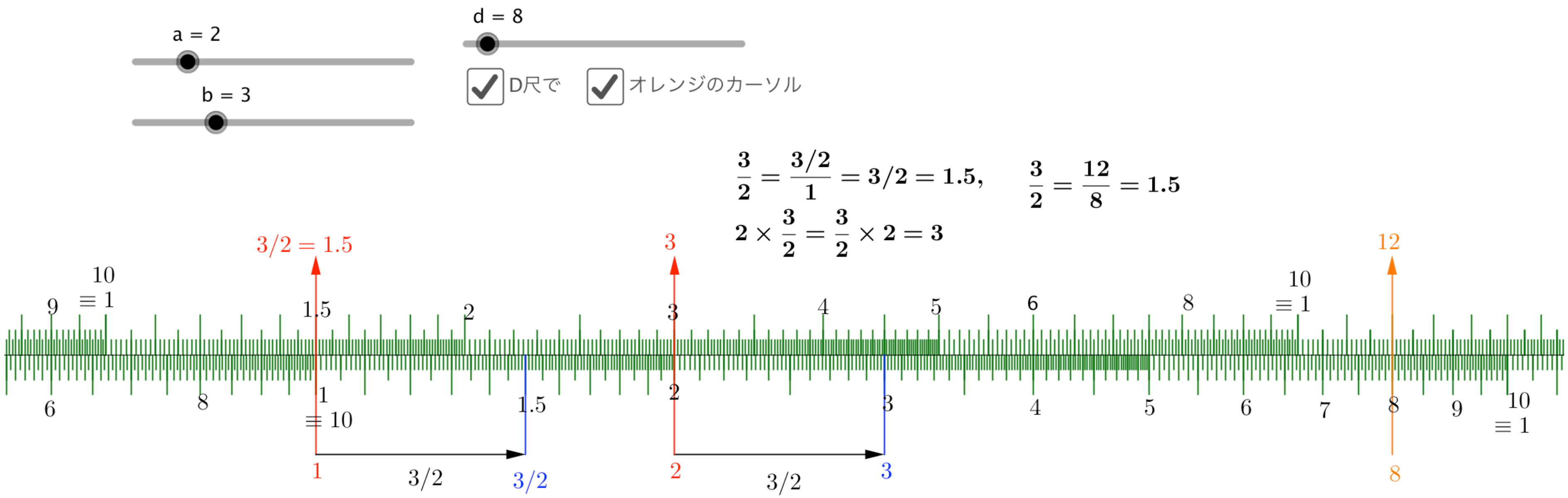
2018/07/21　白楽サークル@神奈川大学
小島 順

計算尺・分数・比例

計算尺の扱いを GeoGebra の上で実現した。目盛りの付け方は HEMMI の計算尺（加藤久和さんに頂いたもの）に従った。二つの数 a, b を与えて，分数 $\dfrac{b}{a}$ を構成する。今は $a = 2, b = 3$ としている。



上の実行例では，下側の D尺の 2 に上側のC尺の 3 を合わせることで，分数 $\frac{3}{2}$ を作っている。

下側の D尺は固定され，上側の C尺がスライドする。 2の上に3が来るようにC尺をスライドし，その状態を一時的に固定する。赤い縦の矢線がその固定状態を示している。この赤い矢線が分数 $\frac{3}{2}$ を表現する。水平な直線の下と上にそれぞれ 2 と 3 が置かれているその部分を切りとると分数 $\frac{3}{2}$ の形そのものでo ある。それは分母 2 を基準とする 分子 3 の比であり，（右からの掛け算で）<u>分母 2 を分子 3 に運ぶ</u>。 赤い矢線はもう1本あり， 1 を 3/2 に運んでいる。

$\frac{3}{2}$ は “2 を 3 に運ぶ” ことで定まる比例を表現している。D尺上を自由に動くオレンジ色のカーソルを別に作ると，D尺の $2n$ と C尺の $3n$ が合っている（重なっている）。例えば, 4 と 6 が合っている。C尺のスライドの仕方は $\frac{3}{2}$ だけでなく，分数 $\frac{6}{4}$ など，オレンジ色のカーソルの移動に伴って発生する無数の分数によって表現される。外形の異なるこれら分数の
同値類として分数は存在する（分数の identity）。**C尺の一つのスライドが一つの分数を定め，一つの比例を定める。**

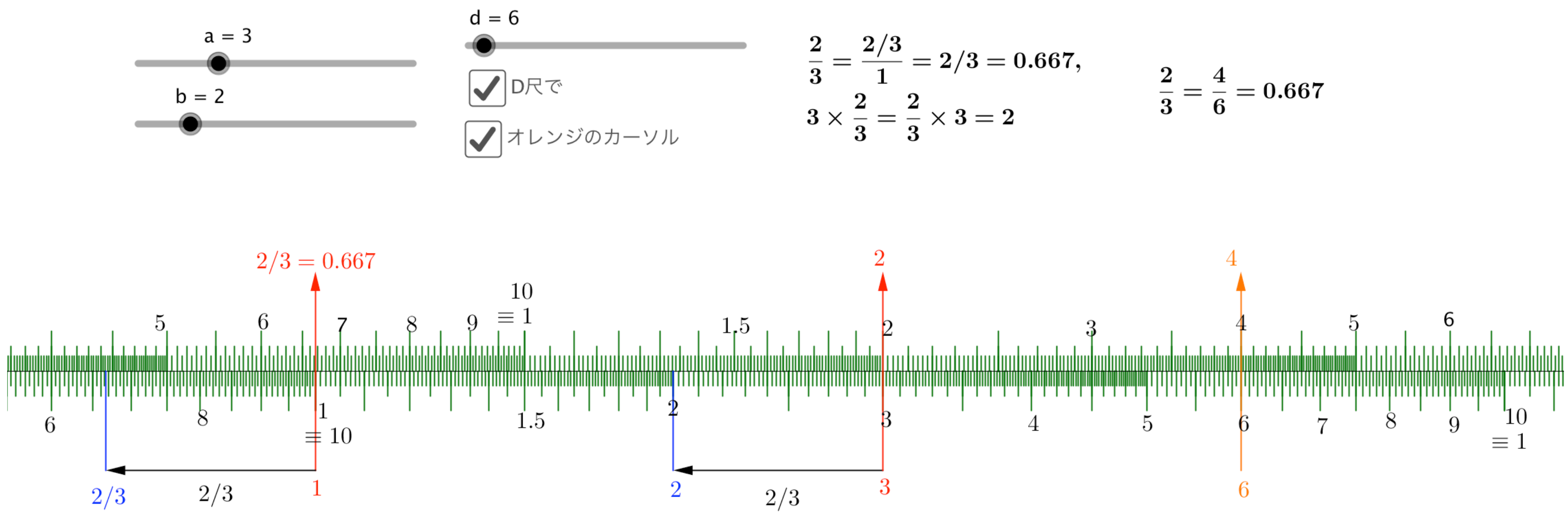
標準的な分数表現は $\frac{b/a}{1}$, 今の例では $\frac{3/2}{1} = \frac{1.5}{1} = 1.5$ であり，これを第2の赤いカーソルで示した。

実際には D尺が表すのは 長さ/m のような直線であり，比 3m/2m に対応する 3/2 は元々はD尺の内部の存在であった。赤いカーソルを D尺の a に置いたように，青いカーソルを D尺の b に置く。ただしこれは C尺には伸びず，下半分の線分である。この例では分数 3/2 は D尺上の 2 から 3への矢線として示されている。D尺のコピーであったC尺を，矢線 3/2 に沿って後退（逆行）させることで，つまり 2/3 を掛けることで，C尺のスライドが実現した。

もう一つの青いカーソルはD尺の 3/2 に置かれている。分数 $\frac{3/2}{1}$ が（D尺からC尺へ向かう矢線としてではなくて） D尺上で 1 から 3/2 に向かう矢線として表現されている。（ “2 から 3 へ“ と”1 から 3/2 へ”の二つの矢線 3/2 が　視覚的に同じ長さで見える。それが対数目盛りの特質である。目盛りを均等にすることより，掛け算という**操作**が場所によらず同じに表現できることが重要である（対数目盛りを採用する根拠の一つ）。

D 尺と C 尺の間で，2倍という操作の同一性が示されている。1に 3/2 が重なり，2 に 3 が重なる。この時，D尺での 1 から 2 への 2倍と 3/2 から 3 への 2倍が重なっている（ 2 の矢線は描き込んでいないが）。これは D尺上の 二つの矢線 2 が D尺のコピー C尺の 3/2 に沿う逆行により重なったのである。

第2の例 分数 $\frac{2}{3}$



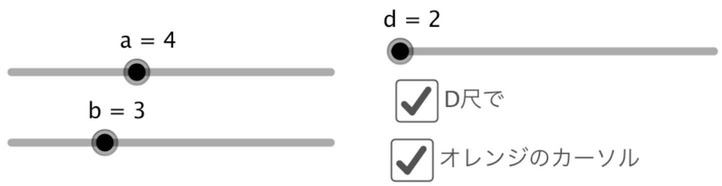
分数は乗法の世界の要素であり，加法の世界の要素ではない。加減でなく乗除の世界の要素である。比較の基準は 0 でなく 1 である。正負の対照に相当するのは拡大・縮小の対照（1より大か小か）である。

2/3 < 1 であるから，操作としての ⅔ の矢線 は 1 が基準で，矢線は左に向く。さらに対数目盛りでは長さが一致する。あるいは，単一の矢線について，前進が 3/2 後退が 2/3 と扱うことができる。。

3/2 が ド から ソ へ上昇する完全5度の音程とすれば， 逆数の 2/3 は ド から下の ファ への完全5度の下降である。矢線の向きが反対で長さが一致するのは極めて自然である。1 から 2/3 への下降を中央の ド からの下降とすれば，3 から 2 への下降は 1オクターブ上の ド に向かう ソ からの下降である。

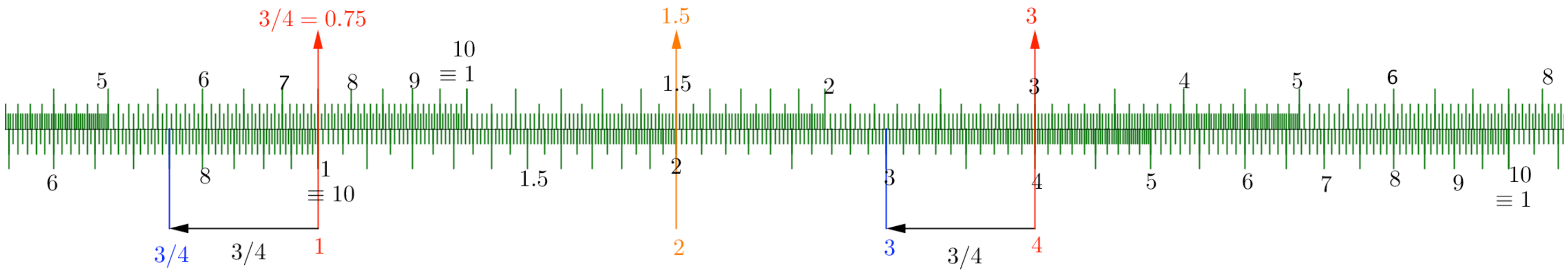
可換の式 $3 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ は D尺・C尺の方で観察すると，長方形を巡る可換性であり，1 から 2 に向かうのに 3 を経由するか 2/3 を経由するかの違いである。この可換性が，分数 2/3 （を掛けること）が比例の操作であること，2/3 が比例係数として機能していることを示している。
その全体像が，C尺の単一のスライド（2/3 の逆の 3/2 のスライド）で実現されている！

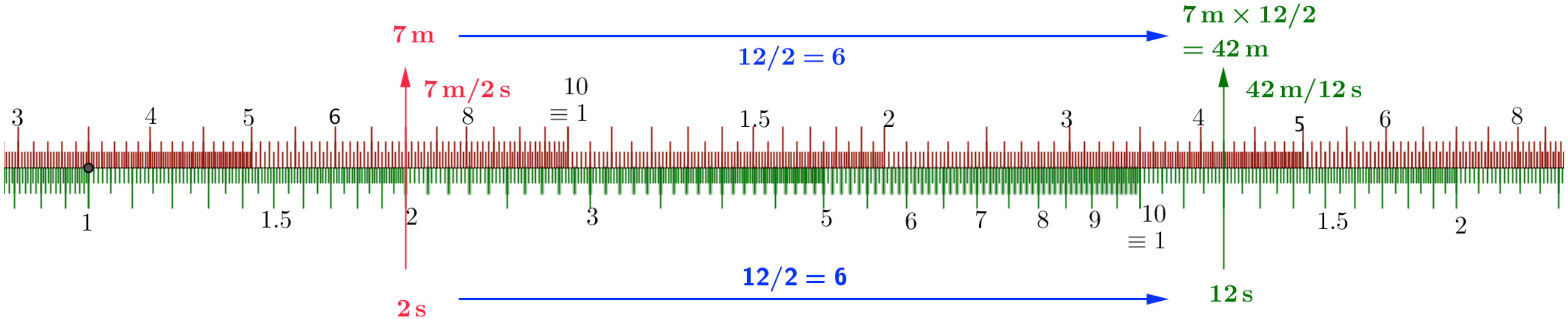
ついでに 分数 3/4 の場合を



$$\frac{3}{4} = \frac{3/4}{1} = 3/4 = 0.75,\qquad \frac{3}{4} = \frac{1.5}{2} = 0.75$$

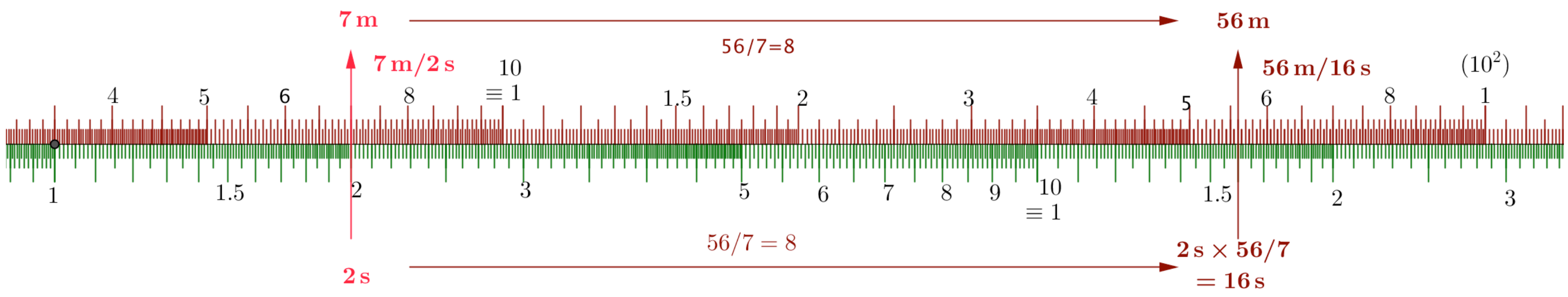
$$4 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 4 = 3$$





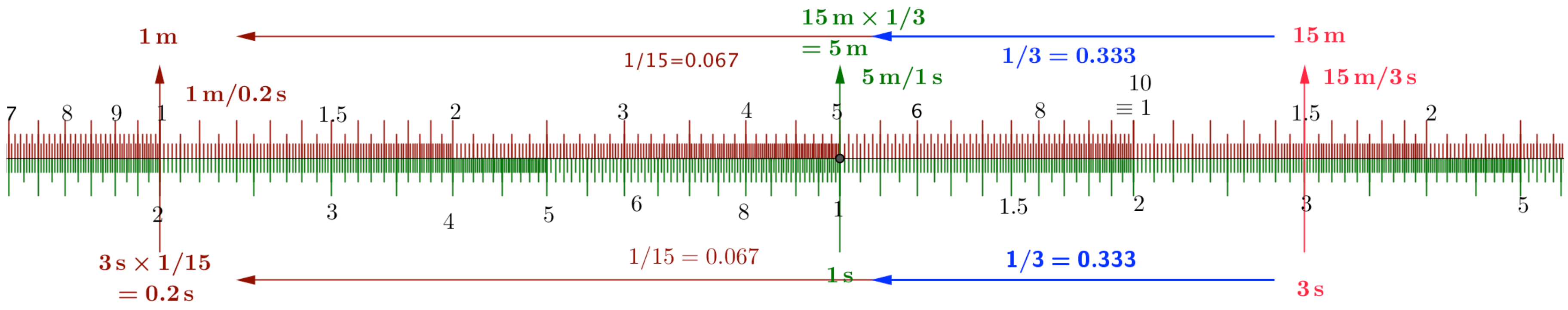
$$t = 2,\ u = 7,\ p = 12,$$

$$\frac{7\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = \frac{7\,\mathrm{m} \times 12/2}{12\,\mathrm{s}} = \frac{42\,\mathrm{m}}{12\,\mathrm{s}}\,, \quad 12\,\mathrm{s} \times \frac{7\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 42\,\mathrm{m}$$



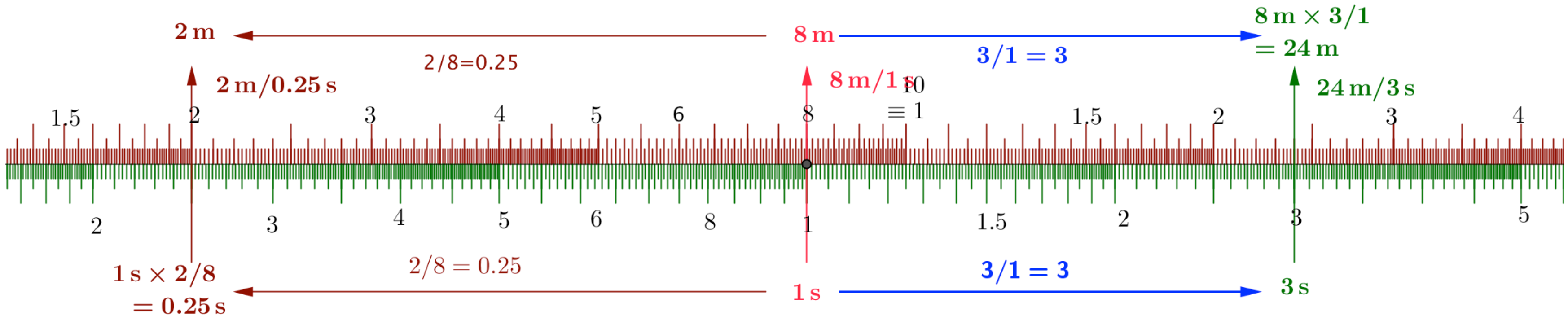
$$\boldsymbol{t=2,\ u=7,\ q=56,}$$

$$\boldsymbol{\frac{7\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = \frac{56\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}\times 56/7} = \frac{56\,\mathrm{m}}{16\,\mathrm{s}},\quad 56\,\mathrm{m} \div \frac{7\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 16\,\mathrm{s}}$$



$$t=3,\ u=15,\ q=1,$$
$$\frac{15\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} = \frac{1\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}\times 1/15} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0.2\,\mathrm{s}}, \quad 1\,\mathrm{m} \div \frac{15\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} = 0.2\,\mathrm{s}$$

$$t=3,\ u=15,\ p=1,$$
$$\frac{15\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} = \frac{15\,\mathrm{m}\times 1/3}{1\,\mathrm{s}} = \frac{5\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}}, \quad 1\,\mathrm{s} \times \frac{15\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{m}$$



$$t=1,\ u=8,\ q=2,$$
$$\frac{8\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}}=\frac{2\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}\times 2/8}=\frac{2\,\mathrm{m}}{0.25\,\mathrm{s}},\quad 2\,\mathrm{m}\div\frac{8\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}}=0.25\,\mathrm{s}$$

$$t=1,\ u=8,\ p=3,$$
$$\frac{8\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}}=\frac{8\,\mathrm{m}\times 3/1}{3\,\mathrm{s}}=\frac{24\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}},\quad 3\,\mathrm{s}\times\frac{8\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{s}}=24\,\mathrm{m}$$