

## PISAの問題を検討する

### 1 はじめに

PISAの調査については、その言説と結果の統計処理ばかりが、教育関係者や政治・経済の分野の人たちに注目され、議論される。もととなる公式文書は framework と結果報告である。そこでは調査の品質についてはほとんど問題にされることがない。製品がそのカタログや宣伝チラシだけで色々と評価され、実物の性能に関心が向かわないのと同様の奇妙さがある。やはり、数学や数学教育の分野の人が中身について積極的に発言することが重要である。柴田勝征のウェブページ [14] はその一例である。この稿は 2008年3月10日、5月25日の日付をもつ草稿に手を入れ、新しく書き加えることで成立した（まだ成立という感じがしない）。旧稿への脚注を再録しておく\*1。

### 2 数学リテラシー

PISAの3年ごとの Assessment の次回は 2012年で、数学が主要テーマとされている。それは 2003年以來では初めてで2回目となる。その理論的枠組みを述べた PISA 2012 Draft Frameworks [9] の一部である、[9-1] の

PISA 2012 Mathematics Framework to OECD, November 30, 2010

を少しだけ眺める。2003年とどこが変わったのか？

神の聖なる言葉のように一部の教育関係者がありがたがる 数学リテラシーの文言は奇怪なものであった。

例えば、2003年の Framework [4] では

Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen.

と書かれている。この翻訳のはずの [4-b], [4-c] の訳文は

数学が世界で果たす役割を見つけ、理解し、現在及び将来の個人の生活、職業生活、友人や家族や親族との社会生活、建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な数学的根拠にもとづき判断を行い、数学に携わる能力。

---

\*1 2006年の2月12日の数教協・全国研究会議で、研究局メンバーを中心に一部の人たちに私が配布した文書「OECD/PISAを巡って」があり、その後半の、PISAの問題を個別に検討した部分を、今回の資料とする。もとのファイルが利用不能で、適当に手を入れながら、タイプし直した。5月25日に誤りを修正し、さらに多少の書き換え、加筆をした。

となっている。これは別の異なるテキストを訳しているらしく、その翻訳も正確かどうか分からない。松下佳代さんの翻訳をここでは引用する。正確で良質な訳文と思う。

数学が世界で果たす役割を見分け理解すること、十分な根拠にもとづいた判断を行うこと、そして、建設的で世の中のことに関心をもった思慮深い市民として生きていく上で必要にかなうようなしかたで数学を使い、数学と関わること、そうしたことができる力

「数学リテラシーの PISA 2012 定義」として提出されたものは次の通りである。

Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts, and tools to describe, explain, and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgements and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens.

数学リテラシー PISA 2012 の定義

数学リテラシーとは、数学を多様な文脈の中で定式化し、使用し、解釈する個人の能力のことである。それには現象の記述、説明、予測のために、数学の概念、数学の手続き、事実、ツールを使用し数学的に思考することが含まれる。数学リテラシーは各個人が、世界の中で数学が果たしている役割を認識し、建設的、行動的かつ思慮深い市民として必要な根拠の確かな判断・決定を行う助けとなる。

これまでのと全く異なり、まず文章がまともになった。内容もまともでバランスがとれている。

第一のセンテンスにあらわれる formulate, employ and interpret は数学のプロセス (process, 過程) である。

これについては [9-1] の p.14 – 17 に詳しく述べられる。

- Formulating situations mathematically (状況を数学的に定式化すること)
- Employing mathematical concepts, facts, procedures and reasoning (数学の概念, 事実, 手続き, そして数学的思考を使うこと)
- Interpreting applying evaluating mathematical outcomes (数学的出力 (解) を解釈し, 適用し, 評価すること)

すこし気に入った文言を探すと

- これまでより、「数学」が格段に重視されている。
- 数学化モデル (サイクル) は新しい数学プロセスに統合された? 全過程を数学のできごとと捉える傾向が強まった?

- competencies が capabilities に変わった。これはいいことだ。
- 数学的プロセスにアクティブに関わり遂行できる力がリテラシーで、それを下から (内部で) 支える多様な能力の諸要素のセットが capabilities である。
- 調査の要素に今回から三つのプロセスが加わる。
- リテラシーは最小限で低レベルの数学を前提に、と思われているがそうではない、と宣言した。
- 子どもの今の生活でなく未来に備えて、教室での数学そのものを重視する、といている。
- 子どもを数学プロセスへのアクティブな参加者と捉えるのが 2012 リテラシーの定義。

### 3 Pizza(ピザ)

これは食べ物のピザで OECD PISA のピザとちょっと紛らわしい\*2

この問題は Take the Test[10] の問題例 29, PISA 2000 Assessment[2] の Math UNIT 1, PISA 2003 Framework[4] の問題例 12, さらに PISA 2012 Math Framework [9-1] の Addendum 2 のなかでの例として扱われている。

そのいくつかについて検討しよう。

#### 3.1 PISA 2000 Assessment の Pizza

Measuring Student Knowledge and Skills(The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy)[2] のなかで Pizza は Mathematics UNIT 1 として現れる。

A pizzeria serves two round pizzas of the same thickness in different sizes. The smaller one has a diameter of 30 cm and costs 30 zeds. The larger one has a diameter of 40 cm and costs 40 zeds.

Sample Question 1

Which pizza is better value for money? Show your reasoning.

解説を読む。

30 cm; 30 zeds; 40 cm; 40 zeds に着目する。生徒は質的考察 (qualitative reasoning) によって問題を解くことができる。すなわち、一次の成長 (growing linear) をする価格よりも、ピザの面積はより速く増加する (二次の成長, quadratic growth) から、大きい方のピザが得だ (the better deal)。これは大変エレガントな解法である。なぜならこの解法が数学的思考の核心に迫っており、容易に一般化できるからである。

---

\*2 イタリア語の発音のカタカナ表記はピッツァだが英語辞書ではピーツァに近い。OECD PISA はピーザに近く発音される (カタカナ表記法はピザだろう)。イタリアの都市 Pisa (ピサ) でさえ普通は (英語やフランス語では) ピーザと発音するようだから、OECD PISA がピサと発音されることはあまりないだろう。

多くの生徒は量的な解法の方を易しく感じるだろう。彼らは面積を計算し2つのピザについてゼッド当たりを求めるだろう：小さい方はゼッド当たり約  $23\text{ cm}^2$ , 大きい方はゼッド当たり約  $31\text{ cm}^2$  である。

生徒が質的思考をするとき彼らは第3コンペテンシー群（数学的思考）を使っているが、大部分の生徒は（より程度の低い）第2コンペテンシー群に頼っている（この問題自身は第2コンペテンシー群相当とランク付けられている）。

これは“good value for money”という英語のイディオム（支払い金額の割に値打ちがある）に即して費用対効果を考えさせる問題である。フランス語版では

Laquelle des deux pizzas est la plus avantageuse par rapport à son prix

となっていて、きわめて明快である（英語の方は一種の慣用句的表現でフランス語版ほど分かりよくはない、と思う）。

- それを求める標準的方法は 価値（この場合は面積で代表される）と金額を比較して、面積/金額か 金額/面積のどちらかを求めて比較することである。それを一段質が落ちる方法のように言う PISA 当局の思想には問題が大きい。
- 買い物という文脈（状況）において、このような（金額とサイズが比例するだけでなく、なんと数値が一致するという）状況は、彼らが強調する authentic にはほど遠い。したがって彼らがエレガントで一般性があると評価する方法は、実は買い物という文脈での一般性に欠けている。

標準的方法に対する差別的な態度は、Take the Test [10] で実証される。日本語版の p.201 に見るように、上記の1 zed 当たりの面積を求めて比較する解答は「部分正答 (Partial credit)」と処理される。「完全正答 (Full credit)」の唯一の例は次のものである。

ピザの直径はその値段と同数である。しかし、ピザの量は直径の二乗を使用して求められるため、大きなピザでは1ゼッド当たり多くのピザが購入できる。

- 「完全正答」が本当に完全だろうか？ 結局は「大きなピザでは1ゼッド当たり多くのピザが購入できる」を結論としているのだが、それと「ピザの量は直径の二乗を使用して求められるため」という理由の間には飛躍がある。この生徒に面接の機会があるならば「それはなぜ？」と問いただきたい。仲間である15歳の生徒たちを納得させる説明ができなければならぬ。その意味ではまだ的確な解答に達していない。
- 逆に「部分正答」の例としてあげられた例については、 $23.6\text{ cm}^2/\text{zed}$  と  $31.4\text{ cm}^2/\text{zed}$  を算出し比較していて、非の打ちどころのない解答に思える。

### 3.2 PISA 2012 Framework の pizza

PISA 2012 math framework の Addendum 2 で 取り上げる 5 個の問題 (item) の一つとしてこの pizza がある。 field trial (実地試験) 用の問題プールのなかでもっとも難しい問題の一つであり、わずか 11% が正解、と言っている。

good value for money という中心テーマをここでは “cost per unit area” (面積あたりの費用) という逆方向で処理する解答を (完全正答の) 解答例としている。

$$\frac{30 \text{ zed}}{\pi(15 \text{ cm})^2} = 0.0424 \text{ zed/cm}^2, \quad \frac{40 \text{ zed}}{\pi(20 \text{ cm})^2} = 0.0318 \text{ zed/cm}^2 \quad (1)$$

により、費用/面積が小さい直径 40 cm のピザの方が費用対効果が勝れている、という結果になる。これは当然完全正答 (Full credit) である。

この問題の特異性 (買い物の文脈としての) は変数の使用を容易にする。金額を  $x$  zed とすればサイズは  $x$  cm である。この変数  $x$  を使って面積を表現すると  $\frac{\pi}{4}x^2$  であり、面積/費用 (費用あたりの面積) は  $\frac{(\pi/4)x^2}{x} = (\pi/4)x$  となる。単位を付けて  $(\pi/4)x \text{ cm}^2/\text{zed}$  である。面積/費用は金額に比例し、金額が 30 zed から 40 zed へ 1.33 倍になると面積/費用も 1.33 倍になる。[10] で partial credit と評価された 2 つの面積/費用についてチェックすると確かにそれは 1.33 倍になっている\*3。

### 3.3 日本語版のピザ

[10-1], [4-b],[4-c] では質問の文章は

どちらピザの方が得でしょうか。考え方も示しなさい ([4-c])

どちらのピザが得ですか。その理由も示してください ([10-1])

となっていて、カギとなる good value for money (その数学的定式化がこの問題の中心テーマであった) が消えている!

日本語版の中心テーマは「買い物」という文脈の扱いに移動している。本当の「正しい解答」は value for money 以前のことがらに依存する。

日常の買い物で大事な心がけは、必要ないものは買わないということである。必要ないものを買うのは金をドブに捨てることに等しい。

食べるのに 30 cm ので済むのか、それともそれでは足りないのか、が第一段の判断である。30cm で済むならばそれを買う。40 cm を買うと、割安かどうかは関係なくて、必要ないもののために 10 ゼッドを捨てることになる。

しかし、例えば、30 cm のが 3 枚必要なとき、一枚分の 3 倍の 90 ゼッド払うことになるが、40 cm が 2 枚だと 80 ゼッドで 10 ゼッド安い。量を比較すると、 $3^2 \times 3 = 27$  より  $4^2 \times 2 = 32$

\*3 —small この事実を指摘する PISA の文書はないようだ。誤答と処理されるおそれがある。

が大きいのでこれで間に合い、その方が得である。しかし、30 cm 2枚を40 cm 1枚に替えることはできない。(3<sup>2</sup> × 2 = 18 と 4<sup>2</sup> = 16 の比較)。このような状況で value for money がはじめて意味をもつ。しかし何が得か損かは必要な量は何かを前提として議論されるのである。

このように問題の性格が変わってしまっても、採点基準は世界共通だから、上のようであれこれと考えた解答は当然誤答(0点)となる。

繰り返すが、ここには問題の意味を変え、あるいは台無しにする誤訳がある。

## 4 CO<sub>2</sub> 排出量の削減

[10-1] の問題例 44, p.170, p.210。[5-a] の p.309 に現れる。問題文の一部分だけを引用する。

百合子さんは図を分析し、排出量の変化率が間違っていると主張しました。「ドイツの減少率(16%)が欧州連合全体(EU 合計, 4%)より大きくなっているけれど、ドイツは EU の一部なので、これはありえない」と彼女は言っています。これはありえないという百合子さんの意見にあなたは賛成ですか。回答が正しいことの理由も記入してください。

まず、EU 全体のことを「EU 合計」と書くのは基本的な誤りである。(英語では EU total, 4% となっていて、これは「EU 全体の減少率は 4%」と読める)。日本版の担当者は国別の減少率の合計が EU 全体の減少率と思っているのだろうか? まさか。

正答の例として挙げられたのは:

いいえ。オランダの例を見ても分かるように、EU の他の国では排出量が増えた可能性もあるので、EU 全体の減少率がドイツよりも小さくなることはありうる。

これはどこかおかしい。上の国別減少率の合計という誤り(?)にそのまま乗っているように見える(この誤りを前提にすれば、たしかに排出量が増えた国があることが全体で 4% になる唯一の可能性だろう。) 一つのクラスで「テストの平均点が A 君の得点より低いのはおかしい。A 君はクラスの 1 人なのに」と騒ぐのは馬鹿げているが、「マイナスの得点者がもしあれば、それもありうる」と反論するのも変である。平均というものの本質からはずれている。上の「正答」のおかしさはそこにある。

ここで言う EU とは京都議定書の 1997 年当時の EU-15 のことのようにだ。また、CO<sub>2</sub> は正確にはメタンなども含んだ温室効果ガス全体の CO<sub>2</sub> 換算であると思われる。ドイツとオランダだけでは十分な議論が難しいので、

European Environmental Agency (EEA) <http://www.eea.europa.eu/>

からとったデータを使う。

別紙の表計算の出力に見るように、これは 1997 年まででなく、2009 年までの結果である。

番号  $i$  の国の 1990 年の排出量を  $a_i$  とし、2009 年の排出量を  $b_i$  とする。排出量の差は  $c_i := b_i - a_i$  である。EU-15 全体について  $a := \sum_i a_i$ ,  $b := \sum_i b_i$ ,  $c := b - a$  とおく。

排出量の増減を統一的に変化量として扱う。正ならば増加量であり、負ならばその大きさ（絶対値）が削減量である。変化量の 1990 年排出量に対する比  $\frac{c_i}{a_i}$  を変化率と仮に呼んでおく。各国の変化率の和（合計）の概念は存在しない。しかし、変化率に重み  $\frac{a_i}{a}$  を係数として掛けた一次結合は

$$\sum_i \frac{a_i}{a} \cdot \frac{c_i}{a_i} = \sum_i \frac{c_i}{a} = \frac{c}{a} \quad (2)$$

のごとく、意味をもち、変形 (2) の結果は EU 全体の変化率に一致する。表計算で「平均への寄与（重み付き）」と書いたのは、各国の変化率に重みを付けたものが EU 全体の変化率の加法的因子となっていることによる。それは各国の変化量をその国の 1990 年排出量でなく EU 全体の 1990 年排出量で割ったものである。EU の削減率 12.69% の半分を超える 7.7% がドイツ一国の寄与である（変化率の 26.30% ではなくて）。一方でスペインは削減率を 1.98% だけ減らす働きをしている。

一次結合 (2) では係数（重み）の和が 1 であることが本質的であった。すなわち 1 の分割のもとに、点の一次結合が点として定まる。

一方、係数の和が 0 という条件下で、点の一次結合はベクトル（矢線）となる。

表計算での「平均との差（重み付き）」の列は後者の概念に属する。

$$0 = \sum_i \frac{a_i}{a} \cdot \frac{c_i}{a_i} - \frac{c}{a} = \sum_i \frac{a_i}{a} \left( \frac{c_i}{a_i} - \frac{c}{a} \right) \quad (3)$$

という計算 (3) では、EU の変化率  $\frac{c}{a}$  に掛かる係数 1 を  $\sum_i \frac{a_i}{a}$  に置き換えている。(3) を逆に見ていくと、EU の変化率を始点とする各国変化率の位置ベクトルに重みを掛けるとその総和が 0 となることを示している。各国変化率平均としての EU 変化率の本質はこのベクトルの式 (3) で捉えられる。ドイツの引力は EU の排出削減率を（現実の 12.69% から）3.98% だけ引き上げるように働き、スペインの引力は 2.82% だけ引き下げるように働いている。それらの引力の平衡点として EU の削減率 12.69% は存在する。引き上げる国は 4 カ国であり、引き下げる国が 11 カ国である。それがバランスしている。

イタリアは削減率が 5.41% と正（変化率が負）であるが、EU の削減率を 0.89% だけ下げる働きをしている。それは逆に 25% の増加（変化率が正）をしてしまったポルトガルの引き下げる働き（0.53% の引き下げ）よりも引き下げ幅が大きい。

EU の変化率を引き下げる力の考察においては各国の変化率の EU 変化率からの差の大きさと各国の重みだけが意味をもつのであって、それが負（削減）か正（増加）であるかは関係がない。削減・増加は連続的につながっている。

表計算は左から 6 番目の列「平均との差（重み付き）」でソートしている。左から 5 番目の「平均への寄与（重み付き）」の列はポルトガルとイタリアに見るように、順序が乱れていることに注意しよう。

- 「多くの科学者は大気中の CO<sub>2</sub> レベルが上昇し、気候変動を生じることをおそれています」は事実ではないだろう。CO<sub>2</sub> 温暖化の巨大な政治的プロパガンタと OECD あるいは PISA

との関連に注目しよう。

- CO<sub>2</sub> の地球循環のなかで人間に由来する部分はどれだけかが問題。無視できる程度？
- 1990 年比で考える発想に根本的な問題がある。例えばアメリカなどが GDP 比で (あるいは人口比で) 日本の 2 倍を超える排出をしているならば、日本並みに減らすことが先決。このような問題は世界の子どもたちをミスリードする。

## 5 アザラシ

これは [4] の p. 51 に, Mathematics Example 15: SEAL として, また [4-b] の p. 41 に “問題例 15: “あざらし” として現れる。その解説と採点基準は一つ前の [2] (2000 年) にある。なぜか全部を集めた (?) [10], [10-1] では除かれている。

この問題の表現は以下の通りである。

A seal has to breathe even if it is asleep. Martin observed a seal for one hour. At the start of his observation the seal dived to the bottom of the sea and started to sleep. In 8 minutes it slowly floated to the surface and took a breath.

In 3 minutes it was back at the bottom of the sea again and the whole process started over in a very regular way.

After one hour the seal was :

- A. at the bottom
- B. on its way up
- C. breathing
- D. on its way down

[4] の日本語訳の [4-b] では次のように訳されている。後で触れるが, これは正確な翻訳とは言えない。

あざらしは, 睡眠中でも呼吸しなければなりません。マーチンは 1 時間にわたってあざらしを観察しました。観察を開始したとき, あざらしは海の底に飛び込み, 眠り始めました。そして 8 分後にはゆっくり浮き上がり, 呼吸しました。その 3 分後にあざらしは再び海の底に潜りましたが, この全行程は極めて規則的に繰り返されていました。

1 時間後, あざらしは次のどの状態にありますか。

- A. 海の底にいる。
- B. 浮き上がる途中にある。
- C. 呼吸中である。
- D. 海底に沈みつつある。

私の一応の解答は以下のようなものである ([4-b] でなく [4] に沿って考える)。時間を分で測る変数を  $t$  とする。



1. 観察の開始時  $t = 0$  において、あざらしは海底に達し眠り始めた。
2.  $0 < t < 8$  は浮き上がる途中である。
3.  $t = 8$  において、海面上で一呼吸する。
4.  $8 < t < 11$  は海底へ沈む途中である。
5.  $0 \leq t < 11$  で起こる、海底から出発して海底に戻るこの運動を周期的に繰り返す。
6.  $t = 60 \equiv 5 \pmod{11}$  においては、「B. 浮き上がる途中」の状態にある。

フランス語版の [4-a] p.57 の exemple 15 : LE PHOQUE はつぎのような文章である。

..... Au début de l'observation, le phoque a plongé au fond de l'eau et s'est endormi. Au bout de 8 minutes, il s'est lentement laissé remonter à la surface et a respiré. En 3 minutes, il a regagné le fond de la mer et le même cycle a recommencé depuis le début, selon un rythme très régulier, .....

マルタンが観察を始めたとき、あざらしは海底に沈んでいて眠り始めました。そして8分かけてゆっくりと水面まで浮き上がり、一呼吸しました。

その3分後にあざらしは再び海底に達し、初めからのこのサイクルが極めて規則的なリズムで反復されました。

このフランス語版は英語版 [4] より明快であり、こちらがオリジナルではなかったか、と一寸思ったりもする。a plongé, s'est endormi などの複合過去形 ( passé composé) から、観察開始時  $t = 0$  に、「底に沈み、眠り始める」がすでに起こっていたのであろうと、より強く推論できる。日本語訳の「飛び込む」は誤訳である。

ところで、[4] ではこの問題の解答は示されていない。しかし、2000年の [2] の p. 66 には、“Mathematics Unit 7 : Seals Sleep” があり、こちらには解答がついている。それによると：

$t = 0$  で沈み始め (starts to dive),  $t = 3$  で海底にいる。 $t = 11$  で再び水面へ、と書いている。そしてこの11分の過程を規則的に繰り返す。

つまり、私の上の解答と逆に、はじめの3分で下降の後に8分で上昇、となっている。

問題文も違う。

.....At the start of his observation, the seal was at the surface and took a breath, It then dove to the bottom of the sea and started to sleep. From the bottom it slowly floated to the surface in 8 minutes and took a breath again. In three minutes it was back at the bottom of the sea again. Martin noted that this whole process was a very regular one .....

2行目の “It then dove to ...” のところは、[2] のフランス語版では

puis il a plongé au fond de l'eau et s'est endormi.

次 (の時刻) に、あざらしは海底に達し (同時刻に) 眠り始めた

のように、取り敢えずは意味が通じる。

[2] は全体としては支離滅裂な悪文である。私の推理は、はじめに [4-a] のような比較的まともなテキストがあり、それは上昇に 8 分、下降に 3 分のサイクルだったのだが、[2] でその解説を担当したスタッフが誤読して「下降の 3 分」の過程が冒頭に追加されてしまった、というものである。追加はしたが全文の構造はそのままにし、所要時間 3 分という情報も移さず、「3 分で下降」という完全情報が「8 分で上昇」の後に残った。極めてみっともない文章である。それに続けて元通りに “this whole process” (この全過程) と書けば、それは構文上は下降と上昇の 11 分でなく、下降、上昇、下降の 14 分を指すことになるだろう。そんなものを反復してどうするのだ！

こうして、結果は illiteracy の見本のような悪文となった。PISA 自身が

..... the information is not neatly organised for student, ..... This is not which student are usually confronted with.

と破綻ぶりを認め、同時に居直っている\*4。

[2] が正しい解釈と言っているのは、下降 3 分、上昇 8 分のサイクルの反復である。 $t = 60 \equiv 5 \pmod{11}$  という計算は、[4] についての私のそれと共通で、今度は上昇をはじめて 2 分後ということになる。やはり、「B. 浮き上がる途中」が正解である！ 上昇と下降の順序がどうであっても、B. が正解である。このような馬鹿げた出題・採点で、子どものどういう能力が測れるのだろうか？ お粗末という他ない。

日本語訳のスタッフは [4] をどのように理解しているのだろうか？ それは不明である。“dived to the bottom” を“海底に達し”でなく、“海底に飛び込み”と訳しているところなどからは、相変わらず ([2] の場合と同じで)  $t = 0$  で水面上という立場をとっていると推測される。

また、“took a breath” は“一呼吸した”を意味するが、「呼吸しました。その 3 分後に再び海の底に潜りました。」と訳されると、「水面に 3 分間留まり、その後に“飛び込んだ”(一気に海底に達した)」のつもりか？とも感じられる。しかし「正訳」は「一呼吸し、その後 3 分かけて海底に達しました」なのだろう。

この問題に代表されるように、PISA の数学リテラシーのかなりな部分は、「ごく僅かの、最低レベルの数学を伴う、読解力テスト」という性格を持っている。「読解力テスト」と言っても、それはまともな意味ではなく、

「曖昧で拙劣な文章を材料に、出題者の頭の中を上手に探る特殊技能」

のテストである。

英国の教育コンサルタント Fred Naylor [7] は次のように語っている\*5。

\*4 「子どもが普段は接することも無いほどの悪文を読み解く力」がリテラシーで、それを測る問題だ、と居直っているのだが、次の回の 2003 年版 [4] では「比較的まともなテキスト」に変わっている。しかし、こちらには解答が示されていないようだ。

\*5 彼は“ダイブ”後に 3 分間だけ海底に留まると解釈している。そしてこの“ダイブ”の時間、水面での呼吸の時間についての情報が全くない、と批判している。

PISA の問題の多くは、私には答えるのが難しい。それは、問題が数学的観点から難しいためではなくて、それが不正確で混乱しているからである。

「極めて規則的に繰り返されました」という言葉の意味も問われなければならない。あざらしの行動についての「極めて規則的」はどの程度のものか、についての常識的判断があり、いくら規則的でも、1時間も経てばサイクルに数分のずれが出て当然である。一時間後にどこにいたかなんて予測できるわけがない。

## 6 歩幅と歩数

[4-b] の p.109 の「歩行」問題である。[1-2] の p. 17 では、この問題が困難度、習熟度レベルの話の例示に使われている。新しくは PISA 2012 Math Framework[9-1] でも例示に使われている。

男性の場合、 $n$  と  $P$  のおよその関係は、公式  $\frac{n}{P} = 140$  で表せます。ただし、 $n =$  1 分間の歩数、 $P =$  歩幅 (m)

と書いてある（解答では  $P$  は  $p$  に変わっている）。

PISA の“数学的リテラシー”の重要な要素である「しっかりとした数学的判断を自らの案件について下す能力」の持ち主は、このような“トンデモ公式”を無批判に受け入れることはないだろう。

[3] の p. 64 では

the formula  $\frac{n}{p} = 140$  gives an approximate relationship between  $n$  and  $p$

のように、“関係式の一つ”と相対化されているが（つまり、一つの特殊な状況下での関係式という受け取りを許容する）、日本語訳はひどい。「およそ」であれ普遍的公式に昇格している。その分、日本語訳の方が欠陥が大きい。

一般に体が大きいと歩幅も大きくなる。しかし、歩数はむしろ減少する。「歩数が歩幅に比例する」が“普遍的公式”としてまともであるはずがない。

一緒に同じ速度で歩いている老若男女のグループを観察するときは、当然、 $n$  は  $p^{-1}$  に比例する。この同速度の制約がない各人の“普通の歩き方”ではどうだろうか？

本川達雄 [8] の p.59 に、動物の体重  $w$  と（普通に歩く）速度  $v$  の両対数グラフがある。ここでは、体重が 0.1g の昆虫から 100kg の哺乳類まで、殆ど同じ直線に乗っていて、そのことが興味深い。この体重比  $10^6$  に対して速度は 20 倍になるとして、 $v = kw^b$  の形で指数  $b$  を定めると、 $b = (\log_{10} 20)/6$  である。身長を  $l$  として、体重  $w$  が  $l^3$  に比例し歩幅  $p$  は  $l$  に比例すると仮定する。その上で  $v = np$  を代入すると、 $np = k_1 p^{3b}$  の形に到達する。これより  $n = k_1 p^{3b-1} = k_1 p^{-0.35}$  あるいは  $np^{0.35} = k_1$  となる。かりに  $p = 0.8$ ,  $n = 90$  とおいて  $k_1$  を定めると  $k_1 = 83$  であり、取り敢えず  $np^{0.35} = 83$  という“公式”に到達した。

このような公式ならば、データに基づき係数を修正すれば、ある範囲で多少は役立つかも知れない。

一人の人間が“より速く歩く”トレーニングをする状況で、「ピッチ  $n$  とストライド  $p$  の一方に偏らず、バランスよく双方を増やすことで速度  $v = np$  を増やす」という方針で臨むならば、問題文の  $n = 140p$  のような式が指針になることもあるかも知れない。しかしそれは、「人々の普通の歩き方」の観察から得られる公式ではない。

この例のような「偽公式」を見分け、その機械的適用の押しつけを拒否すること、それが数学的リテラシーの“定義”の核心である。

- 問2 の歩幅 80 cm に合わせてこの写真を見ると、足跡の長さは 50 cm ほどありそうだ。非現実的。最初の歩幅が 80 cm なら次の歩幅は 120 cm はある。一定の歩幅という概念が成立しない。なぜこの写真を使い続けるのだろうか。
- 9-1 では、この公式はいくらか直観に反しているが、自然の速度で歩く多数の男性の観察によってすでに確立した公式である、と宣言している。
- 上では一人の人間の変動する歩幅と歩数をイメージしたが、[9-1] では 1 人の人間ごとに定まった歩数と歩幅がある話になっている。

## 7 公園の照明

[4-b] の p.18 の問題例 1: 街灯

町議会は、小さな三角形の形をした公園に一本の街灯を設置することを決定しました。その街灯は公園全体を照らすものとします。街灯はどこに設置すればよいでしょうか。

この問題は「数学化」([4] では *mathematising* と *mathematisation* が混用されている) の“見本”という自負のもとに提出されている。

[4] はこの「数学化」の内容として、『街灯の照明は街灯を中心とする円である』と言い、次に『その円は公園(三角形)の外接円である』と言う。『照明が円である』という理由が理解できないが、同じ円ならば、内接円がまだマシであろう。「3 頂点から等距離」という外接円の中心(つまり外心)であることは、照明にとって本質的とは思えない条件である。[4] は「数学化サイクル」の一ステップとして、三角形が鈍角三角形のとき、外接円の中心は三角形の外部に位置するから、「この解答は妥当でないことを認識する」と書いている。これは、もともと不適切なモデルの欠陥が、鈍角の場合に誰の目にも明白になったに過ぎないのであり、「思慮深い市民」であれば、少なくともここでモデルの不適切さに気付くはずである。PISA はそれに気付かず、単に鈍角の場合を切り捨てて終わっている。どこに街灯を置くのだろうか？

ここでは、より自然で普遍的な“点の位置の平均”という立場で考えてみる。

三角形  $A$  の三つの頂点を  $a, b, c$  とする。三頂点の(位置の)平均  $(a + b + c)/3$  は、普通に、幾何では三角形  $A$  の重心と呼ばれ、三中線の交点として実現される。これが“平面の領域としての”  $A$  (あるいは板としての  $A$ ) の重心と一致することを、我々は知っている。後者の意味の重心  $p_0$  は  $A$  の点  $x = (x, y)$  の平均のことで、それは  $A$  の面積を  $K$  とし、密度  $K^{-1} dx dy$  に関する

$x$  の積分

$$p_0 := \iint_A \mathbf{x} K^{-1} dx dy \quad (4)$$

で定義される概念である。

A 上の点  $x$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + (1-s-t)\mathbf{c} = \mathbf{c} + s(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c}) \\ 0 &\leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s+t \leq 1 \end{aligned}$$

と書くことができるから、 $dx dy = 2K ds dt$  に注意して ( $2K$  は  $\mathbf{a}-\mathbf{c}$  と  $\mathbf{b}-\mathbf{c}$  が張る平行四辺形の面積),

$$\begin{aligned} p_0 &= \int_{s=0}^1 \int_{t=0}^{1-s} (\mathbf{c} + s(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c})) 2dt ds \\ &= \mathbf{c} + \frac{1}{3}(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \frac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c} \end{aligned}$$

となり、A の点  $x$  の平均  $p_0$  は、三頂点  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の平均としての “三角形 A の重心” と一致することが確かめられた<sup>\*6</sup>。

ここで  $\mathbf{p} = (p, q)$  をパラメータとしての一般の定点とし、 $\mathbf{p}$  から A の変点  $\mathbf{x} = (x, y)$  までの距離の 2 乗の平均

$$f(\mathbf{p}) = \iint_A \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 K^{-1} dx dy = \iint_A \left( (x-p)^2 + (y-q)^2 \right) K^{-1} dx dy \quad (5)$$

を考察する。これは点  $\mathbf{p}$  からの点  $x$  の距離の “分散” (variance) である。

位置の平均  $p_0$  は『距離の分散  $f(\mathbf{p})$  を最小にする点  $\mathbf{p}$ 』として特徴付けられる。実際、

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q} \right) (\mathbf{p}) &= 2 \left( \iint_A (p-x) K^{-1} dx dy, \iint_A (q-y) K^{-1} dx dy \right) \\ &= 2 \iint_A (\mathbf{p} - \mathbf{x}) K^{-1} dx dy = 2(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \end{aligned}$$

であるから、 $f(\mathbf{p})$  を最小にする定点  $\mathbf{p}$  は (1) で定義した位置の平均  $p_0$  に一致する<sup>\*7</sup>。

「三頂点から等距離」という PISA の基準には、「全体としての明るさの追求」という動機が最初から欠落している。問題なのは、「これこそが “数学化” の見本」という勝手な思いこみを押しつける傲慢さである。

数学を使うことは数学を育てることと一体の営みである。PISA のイデオロギーの最大の特徴は、二つが機械的に分断され、数学の低いレベルを固定したままでの『活用』に墮している点にある。

<sup>\*6</sup> この一致は三角形の特殊性である。そして、ここで要求される真の概念が、三頂点だけの平均でなく、すべての点を考慮する積分的平均であることは言うまでもない。

<sup>\*7</sup> 点  $\mathbf{p}$  からの距離の 2 乗の逆数に明るさが比例すると考え、距離の 2 乗を “暗さ” と捉えるならば、 $p_0$  は「暗さの平均を最小にする点」である。

## 8 為替レート

[5-a] の p.84 の『為替レートに関する問題』を検討する。[10-1] の例題 12, p.129 と p. 193。『数学教室』特集では, [11-4] で加藤元昭氏が分析している。問題文の問3は

1SGD = 4.2ZAR という為替レートのときにメイリンさんは SGD を ZAR に両替し, 3ヶ月後に 1SGD = 4.0ZAR という新しい為替レートのもとで, 手持ちの ZAR を SGD に再び両替する。この為替レートの変化はメイリンさんに有利に働いたかどうか。

のようなものである。ここで, SGD はシンガポールドルである。ZAR はオランダ語の Zuid-Afrikaanse rand (南アフリカ・ランド) の略で, 南アフリカ共和国の通貨。

金額は直線上に目盛られる。ZAR と SGD の二つの直線を用意する。それは原点 0 を中心に拡大縮小する直線であり (日常生活では, それは脳の中に置かれた直線であり, あるいは, 紙の上にスケッチされる), 為替レートが 1SGD = 4.2ZAR のときは, 0 を合わせた上での相対的な伸縮により, それぞれの 1SGD と 4.2ZAR を重ねる。1SGD = 4.0ZAR になるのは, ZAR の価値が増大し, 言い換えると, ZAR の直線が拡大して, 1SGD と 4.0ZAR が重なるに至ったことを意味する。このとき, ZAR の直線は相対的に 4.2/4.0 倍される。

ここでは『採点の基準』について検討しよう。[5-a] には採点の基準が詳しい解説とともに述べられている。

1. 「はい。(1SGD の) 為替レートが下がったことにより, メイリンは手持ちの ZAR に対して, より多くの SGD を受け取った」
2. 「はい。ZAR が下がると, SGD に両替したときに受け取る金額が増えるので, メイリンにとっては好都合である。

1. は正答, 2. は誤答と分類されている。しかし, それだけの根拠があるだろうか。

1SGD に両替される ZAR の金額が 4.2ZAR から 4.0ZAR へと 下がった のである。(ZAR の値打ちが 上がり, ZAR 直線が 拡大した ことにより) 1SGD を購入するために必要な ZAR の金額が 下がった のである。そこから, 「ZAR が下がった」という文言が抽出される。状況を的確に掴んだ子どもが<sup>8</sup>, 為替用語<sup>9</sup>にうとく「ZAR が下がった」と表現したからと言って責めることはできない。したがって, 2. を誤答として切り捨てることには疑問がある。

一方, 1. については, 「(1SGD の) 為替レートが下がる」は言葉だけであり, 内容を説明する具体性がない。説明を完成するには「1SGD を手に入れるために支払う ZAR の額が 0.2ZAR だけ 下がる から」のように, 話を具体化しなければならない。さらに (1SGD) が括弧に入っている

<sup>8</sup> 1SGD が今 4.0ZAR で買えるならば, 前に 1SGD で入手した 4.2ZAR を使えば 1SGD を超える SGD が買える。

<sup>9</sup> 新聞・テレビの為替用語では, このとき「0.2ZAR の ZAR 高」と言うのだが, ZAR の金額の変化は -0.2ZAR で下がっているのだ。そして, その正しい意味は「1SGD の ZAR 価格が 0.2ZAR だけ下がった」である。

ことは、単に「為替レートが下がる」という漠然とした答えでも正答ということであろう。2. を誤答とすることとの対比からも納得できない。

## 9 魚の成長

[4-b] の p.38 の「問題例 13: 魚の成長」を取り上げる。これは熟考クラスターの問題例とされる。

水路に何匹かの魚が放流されました。次のグラフは水路にいる魚の体重の合計で成長のモデルを示したものです。

(グラフ)

ある漁師が、何年か待ってから水路の魚を捕る計画を立てたとします。水路から毎年捕れる魚の数を最大にするには、何年間待たなければならないでしょうか。あなたの解答を導いた考え方も示してください。

これもおよそ「熟考」とは縁のない出題である。単にロジスティック曲線の一つを持ってきて、それを押しつけているだけである。何が適切なモデル化という根本が無視されている。初めに指摘しておくべきこととして、総体重と個体数という全く違うものが、PISA のスタッフの頭ではごっちゃになっている。成長と繁殖がごっちゃになっている。

「数学化」のプロセスは状況に依存する。そして「水路に何匹かの魚が放流されました」は状況を述べたことにならない。これを authentic context (真性の文脈) と自慢するのだから笑わせる。

1. 「水路」という言葉は、側壁をコンクリートで固めた人工的な施設を連想させる。例えば、鯉やヘラブナが一回の放流をきっかけに自然繁殖のサイクルに入る可能性は極めて低い。10年間くらいは（うまくいけば）個体数を減らしながら個体の体重が増加するという状況が現れるだろう。最初 10g の稚魚が 10 万匹放流されて、9 年後に 5kg の成魚（まだ成長の途中である）が 2 万匹というように。
2. 常識的には万の単位の放流数について「何匹か」という訳文は非常識である。
3. 一般には、毎年の放流なしには、持続的に一定量を漁獲する漁法は成り立たない。鮭は海へ下り、4,5 年後に 0.5% ほどがうまくいけば成魚として戻ってくる。ウナギはもともと海のどこかでしか繁殖しない。ロジスティック曲線が顔を出す余地は普通はない。
4. 問題作成・解説のスタッフは、5 年後に魚を獲って 4 年前の個体数（総体重？）に戻すと、そこから 1 年遅れで同じ歴史が再現される、と信じているようだ。しかし、このような“時間独立性”は自明ではなく、普通は成立しない。ここは極めて重要なポイントである。1. で述べた繁殖が途絶えた状況では、漁獲を続けると、いずれは必ずいなくなる。
5. また、もし「ロジスティックの神話」に帰依するつもりなら、（5 年後から年一回、過去 1 年分の生長量を漁獲するのでなく）傾きがもっとも急な 4 年半後から、毎日 55kg ずつを漁獲し、年間の量を 20,000kg よりも幾らかは多くするのが「正解」ではないか。
6. ところで、毎年の漁獲が同じ重量の 20,000kg と認めるとして、なぜそれが「同じ数の魚」なのだろうか。個体は成長し、個体数は毎年減少するのでは。

7. グラフの読み方について：「横目盛りが5の点」は“5年後”であるのに、わざわざ「5年目の終わり」と呼ぶのはなぜ？ 気に入らない。

繰り返しになるが、「数学リテラシー」の中核にあるのは、権威に盲従しない批判的精神である。漁師はこのようなまやかしの数学モデルを拒否しなければ、生活も破綻する。

## 10 軍事予算

[4-b] の p.38, 「問題例 14：予算」を検討する。“熟考クラスター”の二つ目の例である。その概略は

総予算が1980年の5億ドルから1981年の6.05億ドルに変化し、国防予算は3千万ドルから3千5百万ドルに変化した。この間のインフレ率は10%であった。(訳文は「この2年間のインフレ率」となっているが、二つの年度を比較した“1年当たり”のインフレ率である。誤訳に近い。)

A: あなたが平和主義者協会で講演を頼まれたときは「国防費が減少した」と説明するつもりである。どのようにするかを説明しなさい。

B: 「あなたが陸軍士官学校で講演を頼まれたときは「国防費が増加した」と話すつもりである。どのようにするかを説明しなさい

という気味の悪い問題である。(数学部門の長である de Lange が以前から自慢している問題である。)  
「あなたは、・・・つもり」とあるが、私はそのような説明をするつもりはない。しかし、解答としては：

国防予算の全予算に対する比率は6%から5.79%に減っている。これが平和主義者協会ではしゃべる内容である。

一方、国防予算は名目で16.7%、実質で6%増えている。士官学校ではまず「16.7%も増える」とだけ宣伝する。しかしインフレを気にする聴衆がいた場合には、「それでも実質で6.1%は増える」と補足する。

これが「分析し総合するという洞察力が必要な、高度な思考方法であり、深く考え抜いた思考である」と言えるだろうか？ 私はそうは思わない。その時その時に、一つの要素だけ取り出し、調子のいいごまかしをしているに過ぎない。どこが洞察力ある高度な思考方法か。これはペテン師に育てるための基礎訓練である。アメリカの教育で盛んな“ディベート”は正にこういうものであり、PISA とアメリカの風潮の間には親近性があるのだ。

国の予算というものを真面目に考える姿勢が欠落している。インフレ年率が10%という中で、名目21%、実質10%の無謀な拡大予算を組むと、インフレが加速され国の経済は損傷を受ける。

憲法第9条をもち、陸海空軍が禁止されている日本でのこの問題は、無神経か、あるいは挑戦的である。



## 11 文献

- [1] PISA - OECD (ウェブサイト) [www.pisa.oecd.org/](http://www.pisa.oecd.org/) (以下の [2] から [10] までの文献は, [4-c] と [5-a] を除いてすべてこのサイトから (あるいはこのサイトから移って) pdf ファイルの形で無料で入手できる)
- [2] Measuring Student Knowledge and Skills : The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy
- [3] Knowledge and Skills for Life — First Results from the OECD PISA 2000
- [4] The PISA 2003 Assessment Framework — Mathematics, Readings, Science and Problem Solving : Knowledge and Skill
- [4-a] OCDE, “Cadre d’évaluation de PISA 2003 — Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science, et résolution de problème
- [4-b] PISA 2003 年調査 評価の枠組み : OECD 生徒の学習到達度調査 (日本語版 PDF ファイル)
- [4-c] これは [4-b] の出版物 (有料) 国立教育政策研究所・監訳 (ぎょうせい)
- [4-d] Learning Mathematics for Life : A Perspective from PISA
- [5] OECD, “Lerning for Tomorrow’s world — First Results from PISA 2003”
- [5-a] 生きるための知識と技能 2 — OECD 生徒の学習到達度調査 (PISA) : 2003 年度調査国際結果報告書 (Knowledge and Skill for Life) 国立教育政策研究所 編 (ぎょうせい)\*10
- [6] Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy : A Framework for PISA 2006
- [7] PISA 2009 Assessment Framework: Key competencies in reading, mathematics and science
- [8] PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do: Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I)
- [9] PISA 2012 draft frameworks - mathematics, problem solving and financial literacy
- [9-1] PISA 2012 MATHEMATICS FRAMEWORK TO OECD, NOVEMBER 30, 2010 \*\*\*\*Draft subject to possible revision after the field trial\*\*\*\*
- [9-2] PISA 2012 FINANCIAL ITERACY FRAMEWORK L DRAFT SUBJECT TO POSSIBLE REVISION AFTER THE FIELD TRIAL
- [10] PISA Take the Test: Sample Questions from OECD’ s PISA Assessments
- [10-1] “ PISA(ピザ) の問題できるかな? OECD 生徒の学習到達度調査” OECD 編著 (明石書店)
- [11] 『数学教室』2006 年 2 月号・特集「世界から見た日本の数学教育」
- [11-1] 小林道正, “PISA (国際生徒アセスメントプログラム) から我々が学ぶこと”

---

\*10 この名前の付け方は [3] の翻訳かと思わせるところがあるが, [5] の翻訳である。

- [11-2] 松下佳代, “評価の枠組み”
- [11-3] 佐藤敬行, “領域別問題分析「空間と形」”
- [11-4] 加藤元昭, “小学生でも答えられる問題のようなのに — 「量」領域の問題分析 —”
- [11-5] 瀬山士郎, “結果から読み取る”
- OECD, “Lernen für die Welt von Morgen — Erste Ergebnisse von PISA 2003”
- OCDE, “Mesurer les Connaissances et les Compétences des Élèves — Lecture, Mathématiques et Science : l'évaluation PISA 2000”
- [12] Naylor, Fred., “Trojan Horse Within — Short Story of the OECD and PISA Activities ” (Current Concerns No 1, 2004)
- [13] 本川達雄, “ゾウの時間とネズミの時間” (1992, 中公新書)
- [14]enskip 柴田勝征 研究室 ホームページ <http://www1.rsp.fukuoka-u.ac.jp/> 下記の5巻の著作はこのサイトから pdf ファイルが入手できる。質・量ともに大変な著作
- [14-1] 学力の国際比較に異議あり — 科学教育のあるべき姿を求めて —  
第1巻 フィンランド教育の批判的検討
- [14-2] 第2巻 科学的思考とはどういうことか
- [14-3] 第3巻 PISA 基本文献の批判的紹介・PISA に対する国際的批判
- [14-3] 第4巻 街灯は三角形をした公園のどこに設置すべきか (全 152 ページ)
- [14-5] 第5巻 PISA 「リテラシー」概念の思想的源流
- [15] Joachim Wuttke:PISA & Co A Critical Online Bibliography  
<http://www.messen-und-deuten.de/pisa/biblio.htm>