2017/09/23 東数協・月例研＠日大文理

小島 順

加減と乗除の構造を重ねる

正の実数の乗法群は実数の加法群と同型（対数によって）である。

数学の構造からは，学ぶ自然な順序は初めに加法，次に乗法である。正負の数があり，それに重なる形で正数の，1 を境とする大小がある（拡大と縮小）。

小・中高の枠に囚われない，文科省にも支配されない自由な精神で考えよう。

次ページの 1 では加減を扱う。実数直線の “点と矢線” の枠組みが基本である。”二つの引き算”（点 − 矢線 = 点，点 − 点 = 矢線） を対比した。次に 引くことと符号を変えて足すことを対比した。

次に 2 で，長さの直線を実例に乗除を扱う。点は長さであり矢線は長さの比としての実数である。

目盛りは対数目盛りである。そのことにより，長さの比としての実数が 正しく 表示できる。

”二つの割り算” は “長さ ÷ 数 = 長さ” と “長さ/長さ = 数” である（矢線に沿う後退と矢線の構成）。この二つは記号の使い分けで区別できる。

「加減と乗除を重ねる」話は 1. 2 で終わり，3 では一般の”量の計算” の例として，速度を扱った。部分的な抜粋であり，距離を速度で割る二つの割り算（距離 ÷ 速度，距離/速度）を対比した。

中心となるのは 量分数 の概念（分母と分子がそれぞれ量）である。

これまでの計算（4つの引き算，6つの割り算）はすべて，それぞれ足し算，掛け算とペアで提出した。

4 では量分数は直線であり，速度に即して言えば，その上の点は “時間の重み付き速度” であることを説明した。

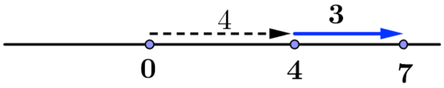
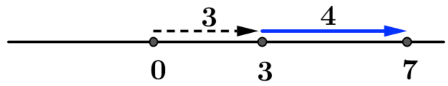
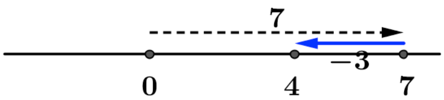
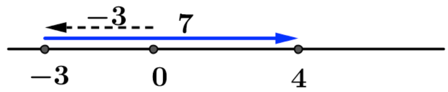
この論考（2ページから後）は，近数協夏季研究集会と数教協・全国中学校集会の合同の”記念講演”「カタカナ語教育学と数学教育の現況」（2017/08/26 @京都・同志社中学校）で配布した資料の一つ「京都講演 数学についての資料」そのものである。

小島順の数学教室 というウェブサイトを（この講演の資料をまとめて提供することを当座の目的に）急遽開設した。京都講演資料集として，[−1]から [10] まで，[4a] というのも途中にあり，計 13 個の pdf ファイルを置いた。その [3] が上記の「京都講演 数学についての資料」であり，それと関連が深いより詳細な論考として選んで収めたのが [4] から [9] までの7個の pdf ファイルである。[−1], [0], [1], [2] の4個が講演の本題の資料である。

小島順の数学教室 — Jun Kojima’s Math school は 現在のところ京都講演資料集だけしかないが（東数協月例研というフォルダにはテストに使った小さなファイルが一つだけ），これから順次に充実させていくつもり。数十年にわたる蓄積をウェブサイトにまとめ残したい。

（あとがき　に続く）

1.　二つの引き算（矢線に沿う沿う後退と2点の差），反数のマイナス記号 ー

	矢線 $\vec{3}$ と $\overrightarrow{-3}$ の作用 前進＝足し算, 後退＝引き算	点 3, −3 を基準に 差の (矢線) を求める
$3 > 0$, 4 は点, $\vec{4}$ は差	 $7 = 4 + \vec{3}$,　(1.1) $4 = 7 - \vec{3}$　(1.2)	 $7 = 3 + \vec{4}$,　(2.1) $\vec{4} = 7 - 3$　(2.3)
$-3 < 0$, 7 は点, $\vec{7}$ は差	 $4 = 7 + \overrightarrow{-3}$,　(3.1) $7 = 4 - \overrightarrow{-3}$　(3.2)	 $4 = -3 + \vec{7}$,　(4.1) $\vec{7} = 4 - -3$　(4.3)

(i)　矢線を表す数字の上にアクセント記号としての矢線を付けた。これは便宜的，一時的な工夫に過ぎない。図上で実際の矢線に付けた数字にはアクセント記号の矢線はつけていない。また，すぐ下の矢線を集めた図の後の式 (1), (2), (3), (4) の数字はすべて矢線を表すが，アクセント記号の矢線はつけていない。

(ii)（1.2）では「3 だけ進むと 7 になる。元の点は？」という方程式の解として 4 を求めている。3 だけの前進に対して矢線の先端から基点に戻るのが後退の意味である。（時間は関係がない。7 から 4 への 3 だけの後退は過去へ戻ることではない，未来における後退もある。温度について，今日の 7 度から 3 度だけ下がるという予報。）

(iii)　均質（homogeneous）な直線の場合，人工的な原点 0 の設定により点はベクトル化（矢線化）される。上の4つの図で破線で示した矢線はそのベクトル（つまり位置ベクトル）である.
(iv)　(3.1) の“＋ −3” は向きを逆転して（ターンして）3だけ進んでいる。(1.2) の“− 3” は向きはそのままに 3 だけバックしている。(1.2) と (3.1) は同じ結果をもたらす。なお，−3 と − 3 はスペースのあるなしで，全く意味が変わる。−3 は 3 の反数化, 逆転（という演算）であり，− 3は“ 3 を引く” 演算である。

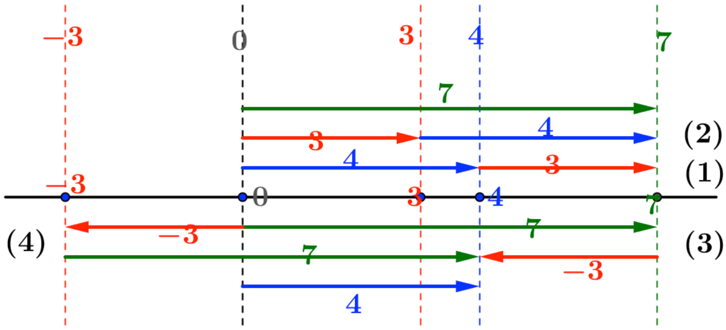
(vi)　同様に，(3.2) と (1.1) は同じ結果をもたらす。

(vii)　(2.3) と (4.3) は2つの点の差（の矢線）を求める引き算。2つの点の足し算の概念が存在しないことに注意を（足し算でなくて，重みの和が 1 のときの “重み付き平均” が点についての普遍的演算）。

(viii)　矢線に沿う後退（足し算の逆）と2点の差という，数字としては同一の引き算 (3.2) と (4.3) が意味的，視覚的にかなり違うことに注意を。

(ix)　本当は互いに同値な3つの式がセットになっている。式番号のドットの後の数字の 1, 2, 3 はセットの中の足し算，引き算，差の順の番号である。

矢線だけに着目した図と式



点を位置ベクトルに置き換え, ベクトル演算に着目,
足し算の部分に限った。点については垂直なカーソル
を補って分かりやすくした。

$$\mathbf{(1)}\quad \mathbf{7 = 4 + 3,} \qquad \mathbf{(2)}\quad \mathbf{7 = 3 + 4,}$$
$$\mathbf{(3)}\quad \mathbf{4 = 7 + -3,} \qquad \mathbf{(4)}\quad \mathbf{4 = -3 + 7,}$$
$$\mathbf{(3) = (1) + -3,} \qquad \mathbf{(4) = -3 + (2)}$$

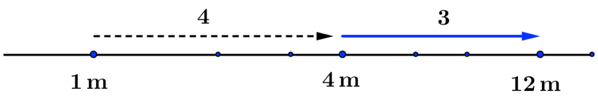
音楽への適用

ピアノの鍵盤で（調律は平均律と想定して）
点は音高，ドイツ音名で
0 = C, 3 = Es，4 = E, 7 = G，−3 = A（音合わせの基準の A = 9），
矢線は音程
3 = 短3度上がる，4 = 長3度上がる，7 = 完全5度上がる，−3 = 短3度下がる，
C-dur, c-moll, a-moll の3和音に相当する。
音楽と数学の総合教育の一つの出発点。

2. 二つの割り算（掛け算の逆と量分数），逆数の役割

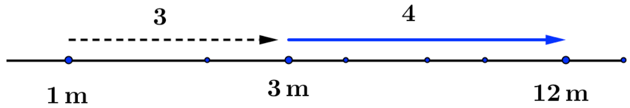
下の4つの図（すでに式に近い）は長さの直線の上の計算を表している。目盛りは対数目盛りであり，そのおかげで，主役である数の矢線の長さが揃÷÷うことになった。(1 m から 4 m への 4 と3 m から 12 m へのへ 4 が同じ長さである。3 と ⅓ が同じ大きさで向きが逆である

対数化の本質は 乗法を加法に置き換えることであり，その反映として，前の諸ページの図と今の掛け算の図の構造がほとんど完全に同一となった。式の形も完全な対応関係がある。例外は引き算記号と割り算記号の対応である。後退と差という二つの引き算の記号はどちらもマイナス記号 − であったが，掛け算の逆の割り算は ÷ , 長さの比を作る割り算は分数表記とここでは使い分けている。これは一般の量分数の特殊タイプである。



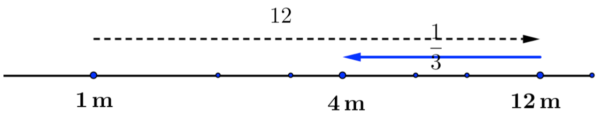
$$12\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m} \times 3, \quad (1.1)$$
$$4\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m} \div 3 \quad (1.2)$$

長さに対する矢線 3 の作用
前進 = 掛ける, 後退 = 割る。
3 による等分除



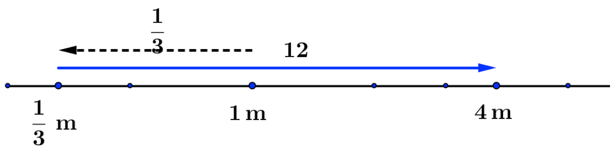
$$12\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m} \times 4, \quad (2.1)$$
$$4 = \frac{12\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}} \quad (2.3)$$

2つの長さの比としての矢線 4,
4 は分母 3 m を分子 12 m
に運ぶ。3 m ずつの包含除



$$4\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m} \times \frac{1}{3}, \quad (3.1)$$
$$12\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m} \div \frac{1}{3} \quad (3.2)$$

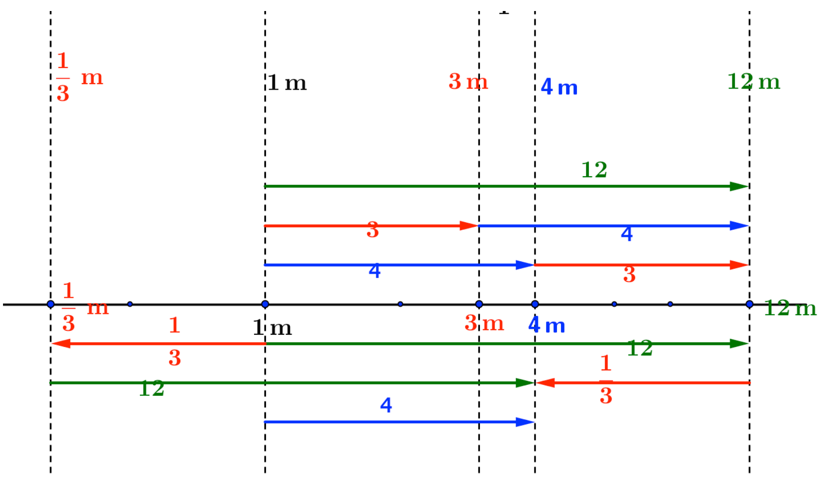
長さへの作用としての矢線 1/3
前進 = 掛ける, 後退 = 割る。
1/3 による等分除(の一般化。
3 > 1 の逆数が 1/3 < 1。



$$4\,\mathrm{m} = \frac{1}{3}\,\mathrm{m} \times 12, \quad (4.1)$$
$$12 = \frac{4\,\mathrm{m}}{1/3\,\mathrm{m}} \quad (4.3)$$

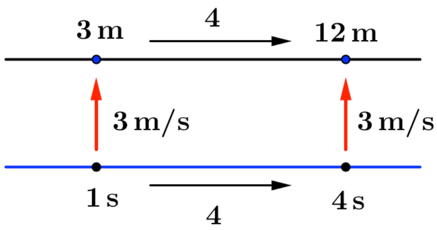
2つの長さの比としての矢線 12,
12 は分母の 1/3 m を分子の 4 m
に運ぶ。1/3 m ずつの包含除

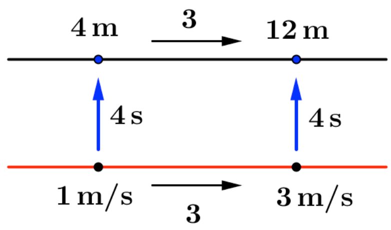
矢線だけに着目



$$(1) \quad 12 = 4 \times 3, \qquad (2) \quad 12 = 3 \times 4,$$
$$(3) \quad 4 = 12 \times \frac{1}{3}, \qquad (4) \quad 4 = \frac{1}{3} \times 12$$
$$(1) \times \frac{1}{3} = (3), \qquad \frac{1}{3} \times (2) = (4)$$

3. 速度の計算(抜粋）二つの割り算





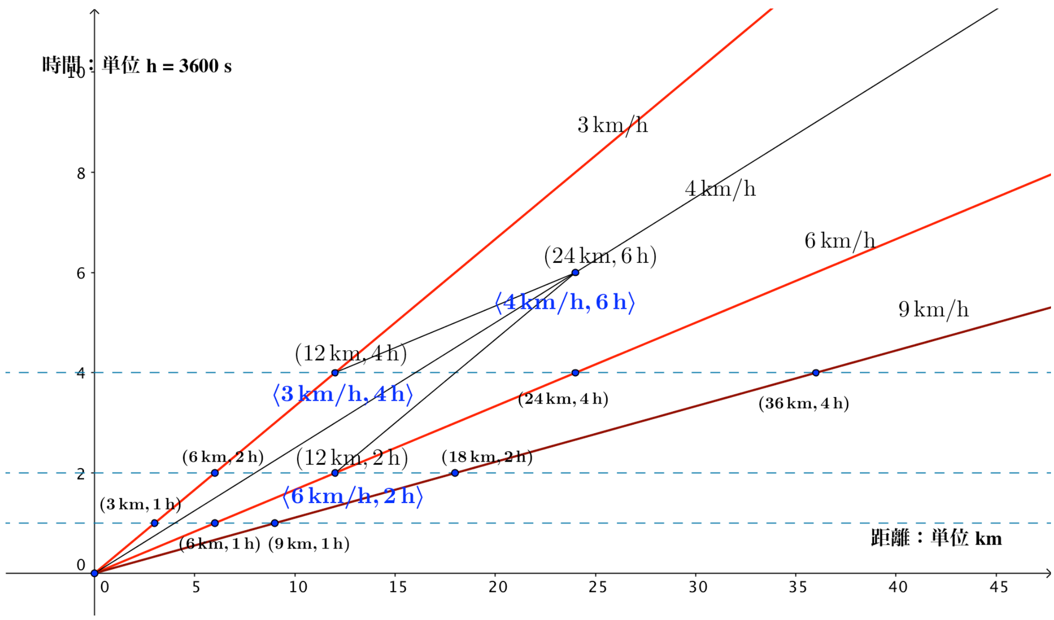
$$\mathbf{12\,m \div 3\,m/s = 12\,m \times \frac{1\,s}{3\,m} = 1\,s \times \frac{12\,m}{3\,m} = 1\,s \times 4 = 4\,s,} \qquad \mathbf{(1.2)}$$

$$\mathbf{4\,s \times 3\,m/s = 3\,m \times 4 = 12\,m} \qquad \mathbf{(1.1)}$$

$$\mathbf{\frac{12\,m}{3\,m/s} = \frac{12\,m \div 12}{m/s} = \frac{4\,m}{m/s} = 4\,s,} \qquad \mathbf{(2.3)}$$

$$\mathbf{3\,m/s \times 4\,s = 4\,m \times 3 = 12\,m} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

4. 速度は直線，その上の点は “時間の重み付き速度



$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \mathbf{3\,km/h + 6\,km/h = 9\,km/h},\\
&(2) \quad \langle \mathbf{3\,km/h, 4\,h} \rangle + \langle \mathbf{6\,km/h, 2\,h} \rangle = \langle \mathbf{4\,km/h, 6\,h} \rangle\,,\\
&(3) \quad \mathbf{(12\,km, 4\,h) + (12\,km, 2\,h) = (24\,km, 6\,h)},\\
&(4) \quad \mathbf{3\,km/h} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} + \mathbf{6\,km/h} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{4\,km/h},\\
&(5) \quad \mathbf{3\,km/h} = \frac{\mathbf{3\,km}}{\mathbf{1\,h}} = \frac{\mathbf{6\,km}}{\mathbf{2\,h}} = \frac{\mathbf{12\,km}}{\mathbf{4\,h}} = \cdots,\\
&(6) \quad \mathbf{6\,km/h} = \frac{\mathbf{6\,km}}{\mathbf{1\,h}} = \frac{\mathbf{12\,km}}{\mathbf{2\,h}} = \frac{\mathbf{18\,km}}{\mathbf{4\,h}} = \cdots,\\
&(7) \quad \mathbf{9\,km/h} = \frac{\mathbf{9\,m}}{\mathbf{1\,h}} = \frac{\mathbf{18\,km}}{\mathbf{2\,h}} = \frac{\mathbf{36\,km}}{\mathbf{4\,h}} = \cdots,\\
&(8) \quad \mathbf{4\,km/h} = \frac{\mathbf{4\,km}}{\mathbf{1\,h}} = \frac{\mathbf{24\,km}}{\mathbf{6\,h}} = \cdots.
\end{aligned}
$$

(5), (6), (7) , (8) は速度。これは**量分数**。分母，分子に量が置かれている，という意味での量分数”であり，「数教協」式の「量分数」とは何の関係もない。分数表示の一つの形，例えば，(5) の 12 km / 4 h は分子・分母の対（つい）(12 km, 4 h) と同一視できる。後者は 速度 3km/h の**斉次座標**（ the homogeneous coordinates）からその一つ（a coordinate）を取り出したものである。
速度ははその斉次座標の同値類として，図に見るように**直線で表される**。個々の斉次座標（それは**分数表示の外形**に対応する）は速度の**直線の上の点**である。

“速度の直線”上の点である分子と分母の対（ここでは**距離と時間の対**）は**速度と時間の対**をも表現し，その座標となる。(2) の 速度・時間対 〈3 km, 4 h〉 は座標 (12 km, 4 h) をもち，図では，速度 3 km/h の同一点の二つのラベルとして示している。括弧としては**角括弧**（langle, rangle）を使った。

(2) は**二つの速度・時間対の和**（足し算）を例示している。それは座標で表すと，(3) のように，**平面ベクトルとしての和**である。
速度・時間対は **“時間の重み付きの速度”** とも述べることができるが，(2) における速度の動きは
(4) に示した **“時間の重み付きの速度の平均”** となっている。

(1) は**速度の和**の例示である。図に見るように，タテの時間を固定して，ヨコの距離についての和をとっている。これは**関数（写像）の和の一般原則**に沿っている（値による和）。速度・時間対の和が，平面ベクトルとして，二つの成分ごとの和をとっていることと原理的に異なる。

あとがき　Web サイトについて

小島 浩（息子）が，今回の「京都講演」に合わせて急遽「小島順の数学教室」を，彼のドメインの中に作ってくれた。感謝している。

サイト名　 小島順の数学教室 — Jun Kojima’s Math school
URL　http://math.oshirase.com/　（math.oshirase.com だけの入力でよい）
到達方法
1　Web ブラウザ（Google Chrome や Safari など）の画面の上部の URL bar （アドレス・バー）に URL あるいはサイト名（の一部）小島順の数学教室 を入力，あるいは
2　検索エンジン(Google や Yahoo! JAPAN) のページ中央の検索窓（検索ボックス？）でサイト名 小島順の数学教室 を入力を入力